

# TESIS CARRERA DE DOCTORADO EN FÍSICA

## DUALIDADES, FLUJOS Y FENOMENOLOGÍA DE CUERDAS

**Martín Mayo**  
**Doctorando**

**Dr. Gerardo Aldazabal**  
Director

**Miembros del Jurado**  
Dra. Anamaria Font  
(Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela)  
Dr. Diego Marqués  
(Instituto de Astronomía y Física del Espacio, CONICET-UBA)  
Dr. Gonzalo Torroba  
(Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche)  
Dr. Francisco Diego Mazzitelli  
(Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche)

28 de Julio de 2021

Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina

INVENTARIO: 24181

06.09.21

Biblioteca Leo Falicov

A mis abuelos  
Por ayudarme siempre.



# Índice de símbolos



# Índice de contenidos

Índice de símbolos	v
Índice de contenidos	vii
Índice de figuras	xi
Índice de tablas	xiii
Resumen	xv
Abstract	xvii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Compactificaciones de Kaluza-Klein . . . . .	5
1.1.1. Las Masas de los Campos . . . . .	6
1.1.2. Simetrías y Cargas . . . . .	7
1.2. Compactificaciones Scherk-Schwarz . . . . .	10
1.3. Teoría de Cuerdas . . . . .	11
1.4. Teoría de Campos Dobles (DFT) . . . . .	21
<b>2. Kaluza-Klein y Windings en DFT</b>	<b>27</b>
2.1. Introducción . . . . .	27
2.2. Coordenadas Armónicas . . . . .	28
2.3. Perturbaciones en DFT . . . . .	30
2.3.1. Expansión en Fluctuaciones de DFT . . . . .	31
2.3.2. Compactificación Generalizada en Kaluza-Klein . . . . .	32
2.4. Expansión en Modos . . . . .	33
2.4.1. Términos cuadráticos, Masas y Difeomorfismos Generalizados . . . . .	35
2.4.2. Los Grados de Libertad Físicos . . . . .	37
2.4.3. Goldstone y Ruptura Espontanea en KK . . . . .	43
2.4.4. Acción efectiva a orden cúbico . . . . .	44
2.5. Análisis en Teoría de Cuerdas . . . . .	46

2.5.1. Relación entre Anomalías Conformes y Gauge Armónico Generalizado . . . . .	47
2.5.2. Vértices Físicos sobre el Toro . . . . .	49
2.5.3. Interacciones de Tres Campos . . . . .	51
2.5.4. Caso del Toro Genérico . . . . .	53
2.6. Comentarios finales del Capítulo . . . . .	53
<b>3. Aumento de Simetría en el Espacio de Módulos</b>	<b>57</b>
3.1. El Aumento de Simetría . . . . .	58
3.1.1. Caso del Círculo: $SU(2)$ . . . . .	58
3.1.2. Aumento del Espacio Tangente . . . . .	60
3.1.3. Mecanismo Higgs entorno a punto fijo . . . . .	64
3.2. Aumento de Simetría en Compactificaciones Toroidales Generales . . . . .	68
3.2.1. Construcción de los Flujos Generalizados . . . . .	69
3.2.2. El Álgebra de los Flujos . . . . .	73
3.3. Resumen y Discusión . . . . .	74
<b>4. Aumento de Simetría en la Heterótica</b>	<b>77</b>
4.1. Adaptación a la Heterótica . . . . .	77
4.1.1. Mecanismo de Higgs via Flujos . . . . .	82
4.2. Ejemplos de Aumentos . . . . .	84
4.3. Incluyendo Fermiones . . . . .	86
4.4. Resumen y Discusión . . . . .	88
<b>5. La Interpolación en el Espacio de Módulos</b>	<b>91</b>
5.1. Introducción . . . . .	91
5.2. La No-Conmutatividad de los modos Cero . . . . .	94
5.3. La Acción Efectiva . . . . .	97
5.4. Acción para modos GKK y el Aumento de Simetría . . . . .	107
5.5. Mecanismo de Ruptura/Aumento de Simetría . . . . .	114
5.6. Conclusiones del Capítulo . . . . .	119
<b>6. Representaciones Masivas</b>	<b>121</b>
6.1. Construcción de Irreps Masivas . . . . .	122
6.2. Aumento de Simetría a $SU(3)$ en el $T^2$ . . . . .	126
6.3. Irreps Masivas con hasta un Oscilador . . . . .	133
6.4. Multipletes en el Lagrangiano . . . . .	136
6.5. Simetría Oculta . . . . .	137
6.5.1. Sector de Vectores . . . . .	139



<b>7. Conclusiones</b>	<b>143</b>
<b>A. Sobre el Capítulo 2</b>	<b>145</b>
A.1. Términos Extra en la Acción de DFT . . . . .	145
A.2. Cálculos en Cuerdas . . . . .	146
A.2.1. Álgebra de difeomorfismos . . . . .	147
<b>B. Sobre el Capítulo 3</b>	<b>149</b>
B.1. Aumento $SU(2)_L \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_R$ . . . . .	149
<b>C. Sobre el Capítulo 5</b>	<b>151</b>
C.1. Resumen básico de la Heterótica . . . . .	151
<b>D. Sobre el Capítulo 6</b>	<b>153</b>
D.1. Construcción de Irreps . . . . .	153
D.1.1. Construcción de los $T_{ij}^a$ . . . . .	153
D.2. Resumen de datos sobre $SU(3)$ . . . . .	156
D.3. Representaciones Masivas $\Lambda = \omega_j$ . . . . .	157
D.4. Simetrías Gauge en Compactificaciones . . . . .	159
<b>Bibliografía</b>	<b>163</b>
<b>Publicaciones asociadas</b>	<b>167</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>169</b>



# Índice de figuras

2.1. El espacio de módulos, conformado por los valores de $(G_{mn}, B_{mn})$ . Los huecos representan zonas del espacio de módulos donde la acción propuesta <b>no describirá</b> el sector no-masivo de la teoría debido al fenómeno de aumento de simetría. Nuevos estados, con valores de $\mathbb{P} \neq 0$ deben ser agregados a la acción. . . . .	55
3.1. El espacio de módulos, conformado por los valores de $(G_{mn}, B_{mn})$ . Cada “hueco” ha sido cubierto en su entorno utilizando compactificaciones de Scherk-Schwarz de DFT. El espacio tangente es agrandado por lo que para cada cubrimiento hace falta proponer un Lagrangiano $\mathcal{L}_i$ , con $i$ barriendo la cantidad de puntos de aumento de simetría. En el centro de cada cubrimiento se encuentra el punto de aumento de simetría. . . . .	75
4.1. Trayectoria en el espacio de módulos. En un punto générico la simetría de gauge es $U(1)^{r+l}$ . A medida que la trayectoria se acerca al punto con simetría de gauge $G_3$ estados en $S_{masive}$ comienzan a perder masa y eventualmente pasan a formar parte de $S_{massless}$ . Lo opuesto ocurre a medida que se aleja del mismo. El proceso similar ocurre para $G_4$ o $G_6$ en la Figura. . . . .	89
6.1. Diagrama árbol de la representación <b>3</b> de $SU(3)$ . Las raíces en las flechas indican que corriente de bajada tiene OPE no nulo con el estado. En cada nodo aparece el estado de la cuerda del multiplete. Puede verse que aparecen estados con el mismo número de osciladores. . . . .	124
6.2. Diagrama árbol de la representación <b>6</b> de $SU(3)$ . Las raíces en las flechas indican que corriente de bajada tiene OPE no nulo con el estado. En cada nodo aparece el estado de la cuerda del multiplete. Puede verse que aparecen estados con distinto número de osciladores. Aquellos que tienen un oscilador, aparecen con una polarización específica que resulta ortogonal al momento que lleva la exponencial, dejando al vértice libre de anomalías. . . . .	125

6.3. Toro $T^2$ . Cuando las líneas de Wilson son apagadas y la métrica y la 2-forma interna son las de la ecuación (6.2.3) nuevos estados no-masivos aparecen aumentando el grupo de simetría Left de la Heterótica de $U(1)^2 \times SO(32)$ a $SU(3) \times SO(32)$ . . . . .	128
--	-----

# Índice de tablas

2.1. Pesos Conformes en DFT. . . . .	29
5.1. Modos, LMC, número de osciladores y su correspondiente operador de vértice. En todos los casos considerados aquí $\bar{N} = \bar{N}_F + \bar{N}_B - \frac{1}{2} = 0$ . . . . .	100
6.1. $\mathbf{8}_{(0,0)}$ . . . . .	129
6.2. $\mathbf{6}_{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})}$ representation. . . . .	129



# Resumen

En esta Tesis se ha trabajado en la construcción de Lagrangianos efectivos para la Teoría de Cuerdas en el marco de la llamada *Teoría de Campos Dobles* (DFT). En particular, uno de los temas transversales ha sido la relajación de la llamada *strong constraint* (SC) en DFT capturando así efectos cuerdosos. En esta línea uno de los aportes más importantes encontrados en esta Tesis al relajar la SC es la descripción de fenómenos de aumento de simetría en compactificaciones toroidales de las cuerdas dentro del formalismo de DFT.

Otro logro de la relajación de la SC ha sido la inclusión de cierta truncación de estados masivos en compactificaciones toroidales tipo Kaluza Klein en DFT. La teoría efectiva obtenida se corresponde con la Teoría de Cuerdas al reproducir las amplitudes de scattering de la misma. Para esto ha sido importante el uso de los difeomorfismos generalizados, que ahora resultan ser una simetría de la acción obtenida, a diferencia de los que ocurre cuando se impone la SC. Dichos difeomorfismos permiten elegir un gauge (llamado armónico) en el cual son aislados los grados de libertad físicos. Este gauge se manifiesta en Teoría de Cuerdas como cancelaciones de anomalías en los vértices que describen a los estados. La acción obtenida es explícitamente invariante ante la T-dualidad y contiene tanto a los estados no-masivos usuales del sector de supergravedad como así su torre masiva de *modos generalizados* de Kaluza Klein (correspondiente a estados con momento interno y winding).

Como se mencionó anteriormente, en el contexto tanto de la cuerda Bosónica como Heterótica, se logró dar una descripción del proceso de aumento y ruptura de la simetría de gauge, basado en el aumento del espacio tangente en DFT. Al lograr relajar la SC utilizando compactificaciones toroidales tipo Scherk-Schwarz los flujos obtenidos dependen de los módulos y se transforman en las constantes de estructura del grupo de gauge cuando estos se ajustan al valor que les corresponde en un punto de aumento de simetría. Desplazamientos alrededor de estos puntos dan lugar a la ruptura de simetría, en la que los bosones de gauge y escalares (y fermiones en la Heterótica) adquieren masas proporcionales a los flujos. Para valores de los módulos no muy alejados del punto de aumento de simetría, las masas de los vectores y escalares resultan bajas, siendo importantes para una descripción fenomenológica de la cuerda. En esta situación, la teoría efectiva se corresponde bien con la Teoría de Cuerdas al reproducir todas las

amplitudes de scattering entre los estados involucrados.

Por último, se logró encontrar una teoría de campos efectiva para la cuerda Heterótica (sector bosónico) compactificada toroidalmente, dependiente de los módulos, que incluye todos los posibles puntos de aumentos de simetría en una dada compactificación (a diferencia del formalismo de Scherk-Schwarz que solo describe de a un punto de aumento de simetría a la vez). Además de los usuales grados de libertad de DFT debieron ser incluidos un nuevo vector y escalar. Los campos de la teoría dependen de las coordenadas dobles internas como es usual en DFT. Su expansión en modos codifica los estados de la cuerda, alguno de ellos necesarios para reproducir los aumentos de simetría. Nuevamente la expansión en modos relaja de manera explícita la SC. Sorprendentemente, una no-conmutatividad en el espacio doble (incluida via un producto no conmutativo) es necesaria para poder reproducir los resultados de las amplitudes de scattering de cuerdas. De esta manera, se logró obtener un Lagrangiano que logra interpolar todos los puntos de aumentos de simetría presentes en una dada compactificación toroidal. La teoría obtenida contiene tanto estados no masivos como masivos. Para el sector del Lagrangiano que involucra solo estados masivos, las irreps que se forman en los puntos de aumento de simetría logran ser armadas siempre y cuando involucren estados con hasta 2 osciladores en cuerdas. Nuevamente, la inclusión de la no-conmutatividad en el espacio doble fue necesaria para obtener los acoplamientos adecuados que dan lugar a las derivadas covariantes apropiadas.

Finalmente, como posible líneas futuras que pueden desprenderse de este trabajo pueden mencionarse: La búsqueda de una simetría para el Lagrangiano interpolador, posiblemente relacionada con Teoría de Campos de Cuerdas; la posible aplicación en encontrar soluciones cosmológicas desde el punto de vista de DFT, en particular que ayuden a entender la transición entre la fase de windings y nuestra fase actual; en el contexto de Cosmología de Gas de Cuerdas puede resultar útil entender los procesos de aumento de simetría desde DFT.



# Abstract

In this Thesis we have worked on the construction of effective Lagrangians for String Theory within the framework of the so-called *Double Field Theory* (DFT). In particular, one of the cross-cutting topics has been the relaxation of the so-called *strong constraint* (SC) in DFT thus capturing stringy effects. In this way, one of the most relevant contributions found in this Thesis when relaxing the SC is the description of the enhancement symmetry phenomena in toroidal compactifications of the strings within the formalism of DFT.

Another achievement of the SC relaxation has been the inclusion of a certain truncation of massive states in Kaluza Klein-type toroidal compactifications in DFT. The effective theory obtained corresponds to String Theory by reproducing its scattering amplitudes. In order to do that, the use of generalized diffeomorphisms has been important, which now turns out to be a symmetry of the action obtained, unlike what happens when SC is imposed. These diffeomorphisms allow choosing a gauge (called harmonic) in which the physical degrees of freedom are isolated. This gauge is manifested in String Theory as cancellations of anomalies in the vertices that describe the states. The action obtained is explicitly invariant under T-duality and contains both the usual non-massive states of the bosonic supergravity sector as well as its massive tower of Kaluza Klein *generalized modes* ( corresponding to states with internal moment and winding).

As mentioned previously, in the context of both the Bosonic and Heterotic strings, a description of the process of enhancement and gauge symmetry breaking was achieved, based on increasing tangent frames in DFT. When achieving relaxation of the SC using toroidal compactifications of Sherck Schwarz type, the fluxes obtained depend on the moduli and transform into the structure constants of the gauge group when these are adjusted to the value that corresponds to them at a point of enhancement symmetry. Displacements around these points give rise to symmetry breaking, in which the vector and scalar bosons (and fermions in the Heterotics) acquire masses proportional to the fluxes. For values of the moduli not very far from the enhancement symmetry point, the masses of vectors and scalars turn out to be small, being important for a phenomenological description of the string. In this situation, the effective theory corresponds well to String Theory reproducing all the scattering amplitudes between

the states involved.

Finally, a moduli independent effective field theory was found for the toroidally compactified heterotic string (bosonic sector) which includes all possible points of enhancement symmetry in a given compactification (unlike the Scherk-Schwarz formalism that only describes one point of increase in symmetry at a time). In addition to the usual DFT degrees of freedom, new vectors and scalars had to be included. The theory fields depend on double internal coordinates as usual in DFT. Its mode expansion encodes the states of the string, some of them necessary to reproduce the enhancement symmetry. Again the mode expansion explicitly relaxes the SC. Interesting enough, a non-commutativity in double space (included via a non-commutative product) is necessary to be able to reproduce the results of the string scattering amplitudes. In this way, it was possible to obtain a Lagrangian that manages to interpolate all the points of enhancement symmetry present in a given toroidal compactification. The theory obtained contains both non-massive and massive states. For the Lagrangian sector that involves only massive states, the irreps that are formed at the points of increasing symmetry can be constructed as long as they involve states with up to 2 oscillators in String Theory. Again, the inclusion of the non-commutativity in the double space was necessary to obtain the proper couplings that give rise to the appropriate covariant derivatives.

Finally, possible future lines that can be derived from this work may be mentioned: The search for a symmetry for the interpolating Lagrangian, possibly related to String Field Theory; the possible application in finding cosmological solutions from the DFT point of view, in particular that help to understand the transition between the windings phase and our current phase; in the context of String Gas Cosmology, it may be useful to understand the processes of increasing symmetry from DFT.

**Keywords:** THESIS FORMAT, TEMPLATES, INSTITUTO BALSEIRO

# Capítulo 1

## Introducción

### Formulación del problema

Por requerimientos de autoconsistencia matemática y física, la teoría de cuerdas necesita estar formulada en un espacio-tiempo con un número de dimensiones  $D = 10$  (para la cuerda bosónica  $D = 26$ ). Claramente esto no se corresponde con la observación experimental. Una forma de resolver este problema es realizando un proceso llamado *compactificación*. Este básicamente considera a la teoría viviendo en un espacio tiempo  $M_4 \times M_6$ , donde  $M_4$  es nuestro espacio-tiempo usual Mikowskiano y  $M_6$  es una variedad interna donde viven el resto de las coordenadas espaciales no observadas.

Cuando la compactificación es llevada a cabo aparecen nuevas propiedades que enriquecen a la teoría, como las *dualidades*. Una de las más famosa de ellas, la *T-dualidad*, jugará un papel preponderante en toda esta tesis.

La formulación de las cuerdas es por construcción *perturbativa* y hasta hoy no se ha podido encontrar una formulación completa no-perturbativa de la misma. Han habido intentos, como la Teoría de Campos de Cuerdas, pero su formulación es tan compleja que son pocos los avances significativos en la misma. Muchos avances en incorporar efectos no-perturbativos cuando se trata de teorías de campos han ocurrido en los últimos años, y en particular intentos de construir una teoría de campos efectiva para la descripción de las cuerdas como la que se estudia en este trabajo: La teoría de Campos Dobles (DFT). Naturalmente los campos describen partículas puntuales y por lo tanto parecería imposible que estos (intuitivamente) describan cuerdas. Para sortear esto, la teoría viene equipada con la T-dualidad como simetría, incorporando así efectos cuerdosos.

La construcción de DFT hasta hace poco necesitaba imponer un vínculo ad-hoc conocido como *strong constraint* (SC), el cual básicamente mataba toda posibilidad de visualizar efectos cuerdosos en DFT. Este es básicamente el problema abordado en esta tesis. Se trabajó en formas de relajar el *strong constraint* obteniendo así una

teoría efectiva para las cuerdas que incorpore características de las mismas, tales como estados físicos con *winding*.

El objetivo de esta tesis es desarrollar teorías efectivas de cuerdas compactificadas sobre Toros, enmarcadas en DFT, que logren sortear el problema de imponer la condición de SC. De esta manera tendríamos Lagrangianos efectivos que incorporan efectos cuerdosos, i.e. presencia de estados cargados con winding y momento KK internos simultáneamente.

En las compactificaciones toroidales un fenómeno típico de las cuerdas es el “aumento de simetría” a lo largo del espacio de módulos. Cuando se compactifican teorías de gravedad ordinarias (no-cuerdosas) el resultado es típicamente un Lagrangiano efectivo con simetrías de gauge. El grupo de gauge que aparece está directamente relacionado con la variedad interna de la compactificación, así pues, si la variedad es un toro  $T^n$  la simetría resultante es un  $U(1)^n$ , si la variedad es una esfera  $S^2$  la simetría resultante es un  $SU(2)$ , etc. Es decir, el grupo de gauge resultante es el correspondiente a la variedad utilizada para compactificar<sup>1</sup>. Sin importar el tamaño de la variedad (radios de compactificación en el Toro) el grupo de simetría resulta ser el mismo. Esto **no** ocurre en cuerdas. Para ciertos tamaños el grupo de simetría *aumenta*, y más aún, puede cambiar de Abelian a no-Abelian.

El proceso de aumento de simetría debiera ser tenido en cuenta para cualquier descripción fenomenológica de la cuerda, ya que durante el mismo, nuevos estados de la cuerda (vectores y escalares) se vuelven no-masivos para dar lugar así a la nueva simetría. En general, tales estados están cargados con winding y momentos de KK simultáneamente, por lo que no han podido ser incluidos hasta ahora en cualquier formulación de DFT debido a la condición SC que suele implementarse.

Con todo esto presente, podemos ahora especificar más los objetivos de este trabajo: Lograr desarrollar Lagrangianos efectivos para la cuerda compactificada sobre toros genéricos. De esta manera, habremos desarrollado técnicas que permitir esquivar la SC, logrando incluir estados con winding y momento KK, y además tendremos incluidos formalismos que logren incluir el mecanismo de aumento de simetría dentro de la teoría efectiva.

En el Capítulo<sup>2</sup> 2, dentro del marco de la formulación usual de DFT para la cuerda bosónica, mostraremos como relajar la SC levemente, para incluir algunos estados masivos de la cuerda. En particular, adaptaremos el formalismo de KK a DFT e identificaremos determinados modos internos del desarrollo de Fourier con los estados de la cuerda. Todo esto se realizará con DFT compactificada a un toro genérico  $n$ -dimensional, por lo que todos los modos resultarán en general masivos. Los resultados

<sup>1</sup>Explicaremos más detalladamente esto en la sección 1.1

<sup>2</sup>Lo desarrollado en este Capítulo fue motivo de una publicación bajo el nombre “*Probing the string winding sector*”

obtenidos son comparados con cuerdas para verificar la validez de los mismos. La relación de la SC fue reemplazada por la *Level Matching Condition* (LMC), la cual como es sabido es la mínima condición que debe estar presente en la teoría ya que la propia cuerda la tiene. El Lagrangiano presentado (con interacciones de hasta tres campos) tiene invariancia ante difeomorfismos generalizados siempre y cuando la LMC sea impuesta, lo cual es un avance significativo para la construcción de DFT donde siempre había sido necesaria la utilización de la SC. Más aún, son estos difeomorfismos los que permiten leer quiénes son los grados de libertad físicos e identificarlos con cuerdas. Con todo esto habremos desarrollado una teoría efectiva que incorpore determinados estados con winding pero en el proceso ignoraremos el efecto de aumento de simetría, dejando esto para el siguiente Capítulo.

En el Capítulo<sup>3</sup> 3 se tendrá en cuenta el efecto de aumento de simetría sobre compactificaciones toroidales genéricas en la cuerda bosónica. Todo esto se hará con un enfoque diferente al utilizado en el Capítulo anterior, se utilizarán compactificaciones tipo Scherk-Schwarz en el marco de DFT. Particularmente esto dará lugar a compactificaciones con flujos dependientes de los módulos. Al moverse continuamente por el espacio de módulos se logra conseguir el efecto aumento/ruptura de simetría. Este formalismo tendrá la ventaja de “emparchar” los huecos dejados en el Capítulo 2 (puntos de aumento de simetría). El proceso de ruptura dará lugar a un mecanismo de Higgs en el que todos los acoplamientos son obtenidos exactamente y no como un mero desarrollo a primer orden.

En el Capítulo<sup>4</sup> 4 se extenderá el formalismo desarrollado en Capítulo 3 para el caso de la cuerda Heterótica. La razón radica en que es la única de las supercuerdas que, sin involucrar branas, presenta el fenómeno de aumento/ruptura de simetría. Además el análisis propuesto incluye a los fermiones. El formalismo desarrollado aquí y en el Capítulo 3 logra capturar la fenomenología de la cuerda (bosónica y heterótica) en los entornos de un punto autodual del espacio de módulos. Por lo tanto, podríamos mencionar como desventaja de la técnica aplicada aquí (y en el Capítulo anterior) que la acción efectiva propuesta depende del punto del espacio de módulos en el que ocurre el aumento. En efecto, en número de campos presentes en la acción efectiva varía de manera discreta (no continua) para distintos puntos de aumento. Por lo tanto no sirve para *interpolar* diferentes puntos del espacio de módulos. El problema principal es que parecen necesitarse infinitos campos, lo cual resulta imposible en el formalismo de Scherk-Schwarz.

En el Capítulo<sup>5</sup> 5 desarrollaremos un formalismo (en la Heterótica) que permite

---

<sup>3</sup>Lo desarrollado en este Capítulo fue motivo de una publicación bajo el nombre “*Gauge symmetry enhancing-breaking from a Double Field Theory perspective*”

<sup>4</sup>Lo desarrollado en este Capítulo fue motivo de una publicación bajo el nombre “*Double Field Theory description of Heterotic gauge symmetry enhancing-breaking*”

<sup>5</sup>Lo desarrollado en este Capítulo fue motivo de una publicación bajo el nombre

resolver la dificultad mencionada arriba. Aprovechando el formalismo de Kaluza-Klein desarrollado en el Capítulo 2 se propondrá una acción con simetría tipo  $O(d, d)$  dependiente de las coordenadas dobles toroidales que al desarrollarse en Fourier dará lugar a un Lagrangiano con un número infinito de modos. Antes del desarrollo en modos no aparece una dependencia en los módulos, esta aparece luego del mismo. Al variar continuamente los módulos el sector no-masivo de dicha acción cambiará de tal manera que reproducirá los aumentos de simetría. Es decir, en una única acción se habrá podido condensar todos los posibles aumentos de simetría posibles, logrando así una interpolación continua entre los posibles puntos del espacio de módulos. La interpolación debe entenderse en el siguiente sentido: La acción dependiente de los módulos propuesta tendrá por construcción, un sector masivo y no-masivo. Al variar los módulos, la masa de los modos de KK cambiará continuamente y al aproximarse a un punto del espacio de módulos donde ocurre el aumento de simetría ciertos modos se volverán livianos, anulándose completamente en dicho punto. Como el sector no-masivo/liviano es aquel que resulta útil para la fenomenología de la cuerda, puede decirse que se ha obtenido un lagrangiano que interpola entre todos los posibles lagrangianos efectivos de la cuerda. Siempre que se lo desee el sector masivo puede integrarse para quedarse solo con el sector liviano.

En el desarrollo del Lagrangiano interpolador será necesario modificar la geometría. En DFT usualmente se piensa al espacio doble como conmutativo (aunque hubo menciones [1] en la que se sugiere algún cambio). Como fue sugerido en publicaciones [2–4], una formulación no-conmutativa del mismo (encontrada en cuerdas) permitiría poder dejar a la cuerda libre del uso de los cociclos. Al plantear el espacio doble en la acción interpoladora todos los acoplamientos, constantes de estructura de grupos, etc. son reproducidos exactamente. Más aún, cierta información sobre la estructura de los estados masivos es codificada por la acción interpoladora: Cualquiera que sea el punto de aumento de simetría, los estados masivos deben agruparse para transformar en representaciones del grupo aumentado. Al mirar el caso de la compactificación a un toro  $T^2$  sobre uno de sus puntos de aumento de simetría,  $SU(3)$ , el primer nivel de estados masivos se acomoda para transformar en la representación que le corresponde desde cuerdas (la 6). Como es de esperar, esto sucede solo para el primer nivel, pues para niveles más masivos es necesario incluir grados de libertad que no fueron considerados. Es decir, cuando la representación masiva involucra a modos que fueron tenidos en cuenta en la construcción del Lagrangiano interpolador, la representación masiva se arma bien. Nuevamente, el papel de la no-conmutatividad es crucial para reproducir todos los acoplamientos. Esto será analizado con detalle en el Capítulo 6 donde analizaremos el alcance del Lagrangiano interpolador sobre el sector masivo. Finalmente,

en el Capítulo final presentamos conclusiones y posibles direcciones de trabajo futuro.

A continuación se presentan breves resúmenes y notación sobre tópicos generales como Compactificaciones, Teoría de Cuerdas, etc, necesarios para la buena comprensión de la Tesis. El lector familiarizado con los temas (y su jerga específica) puede saltarse las próximas secciones e ir directo al contenido específico de la tesis a partir del Capítulo 2 en adelante. No obstante, puede, de todas maneras, resultar útil por el vocabulario específico utilizado en el resto de los Capítulos.

## 1.1. Compactificaciones de Kaluza-Klein

La idea de estas compactificaciones es bastante sencilla, se propone un Lagrangiano con campos viviendo en un número  $D + r$  de dimensiones, siendo  $r$  el número de direcciones extra, para luego integrar  $r$  de ellas y obtener una acción efectiva  $D$ -dimensional. En el proceso, aparecen nuevos campos<sup>6</sup>, con nuevas simetrías producto de la integración. La teoría obtenida depende fuertemente de la variedad diferencial en la cual vivan las  $r$  coordenadas extra. Desde ya, para poder interpretar físicamente este proceso, las dimensiones extra deben vivir en una variedad compacta, cuyo volumen típico debe ser lo suficientemente pequeño como para no haber sido detectado experimentalmente hasta el momento. Las dimensiones extra son del tipo espacio. Dimensiones extra del tipo tiempo son indeseables por muchos motivos: Dan lugar a taquiones; a geodésicas que violan causalidad debido a la presencia de ciclos temporales cerrados; a obtener lagrangianos efectivos para interacciones del tipo electromagnética con el signo incorrecto, etc.

Originalmente el concepto de compactificación fue propuesto como una manera de unificar a la fuerza de gravedad con el electromagnetismo. Veamos un ejemplo sencillo de como funciona esto con el fin de fijar notación y jerga. Tomemos la acción de Einstein-Hilbert viviendo en 5 dimensiones

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^5x \sqrt{-g} \mathcal{R}^{(5)}.$$

siendo  $\mathcal{R}$  el escalar de curvatura 5-dimensional construido con la métrica  $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , con  $\hat{\mu} = 1, 2, 3, 4, 5$ . Ahora, compactifiquemos la dirección extra  $x^5$  a un círculo  $S^1$  de radio  $R$ . Por lo tanto, por ser la variedad interna  $S^1$  todos los campos de la teoría, i.e.  $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , deben tener la siguiente dependencia funcional en las coordenadas

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x_\mu, x_5) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(n)}(x_\mu) e^{inx_5},$$

---

<sup>6</sup>Técnicamente, no aparecen nuevos campos, sino que son grados de libertad que en altas dimensiones forman parte de un único campo y al realizar la reducción dimensional lucen como campos distintos al ser vistos desde bajas dimensiones.

donde ahora  $\mu = 1, 2, 3, 4$ . Los grados de libertad que vistos en  $D = 4$  dimensiones son aquellos que dependen de las coordenadas espacio-tiempo  $x_\mu$ , es decir  $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(n)}(x_\mu)$ , por lo tanto, el proceso de compactificación transforma una acción con finitos campos ( $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ) a una con infinitos campos, uno por cada modo de Fourier ( $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(n)}(x_\mu)$ ).

Para expresar la acción en términos de los nuevos campos conviene realizar un *ansatz* de la métrica, i.e. como va a ser descompuesta en índices espacio-tiempo y en índices internos. En efecto, suele proponerse

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x, x_5) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x, x_5) - \frac{16\pi G}{R^2} A_\mu(x, x_5) A_\nu(x, x_5) \Phi(x, x_5) & \frac{\sqrt{16\pi G}}{R} A_\mu(x, x_5) \Phi(x, x_5) \\ \frac{\sqrt{16\pi G}}{R} A_\nu(x, x_5) \Phi(x, x_5) & -\Phi(x, x_5) \end{pmatrix}$$

donde ahora  $\mu = 1, 2, 3, 4$  y el valor de expectación de la métrica en 5 dimensiones,  $\langle g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x, x_5) \rangle = (\eta_{\mu\nu}, R^2)$  y por lo tanto  $\langle g_{55}(x, x_5) \rangle = R^2$ . Tal propuesta resulta cómoda para leer el tipo de teoría obtenida en bajas dimensiones.

Si se está buscando ver la fenomenología obtenida, interesa solo el sector no masivo, el cual se corresponde con los modos cero<sup>7</sup>  $n = 0$  (sin dependencia en la coordenada interna  $x_5$ ). Con el anterior *ansatz* obtendríamos, una vez hecha la integración en  $x_5$

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{R}^{(4)} - \frac{1}{6} \Phi^{-2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi) - \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

donde  $\mathcal{R}^{(4)}$  es ahora el escalar de curvatura 4-dimensional construido a partir de la métrica 4-dimensional  $g_{\mu\nu}(x)$ ,  $F_{\mu\nu}$  es el campo de gauge Abelian construido con  $A_\mu(x)$ , y  $G = \frac{\bar{G}}{2\pi R}$  es la nueva constante de gravitación en bajas dimensiones. Por lo tanto, gravedad en 5 dimensiones da lugar a gravedad en 4 dimensiones más teoría de gauge y campo escalar.

Notar que el valor de expectación del campo escalar (vev) no está fijado por el lagrangiano *a priori*, ya que no hay un potencial para éste. Cuando esto ocurre se suele decir que tal escalar es un módulo. Notar además que tal valor del vev tiene una interpretación muy física: determina el tamaño de la dimensión extra.

### 1.1.1. Las Masas de los Campos

El porqué de que los estados masivos se corresponden a  $n \neq 0$  es sencillo. En 5 dimensiones solo existe la métrica, y cada una de sus componentes satisface la ecuación de movimiento de Klein-Gordon sin masa, i.e.  $\partial_{\hat{\mu}} \partial^{\hat{\mu}}(\dots) = 0$ . Si ahora compactificamos, la ecuación Klein-Gordon en 5 dimensiones se reduce<sup>8</sup> a  $(\partial_\mu \partial^\mu + \partial_5 \partial^5)(\dots) = 0$ , la cual

<sup>7</sup>Ya se mostrará más adelante la razón de que esto sea así. Una forma rápida de verlo es que los modos no triviales excitan la dependencia de los campos en la coordenada interna, la cual es pequeña. Como para ver tal coordenada es necesaria una gran cantidad de energía se puede esperar que la masa de estos modos sea del mismo orden de magnitud.

<sup>8</sup>Recordar que  $\partial_5 \partial^5 = R^{-2} \partial_5 \partial_5$



aplicada a un campo

$$\phi(x, x_5) = \sum_n \phi^{(n)}(x) e^{inx_5}$$

implica que para cada modo se satisface

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + \frac{n^2}{R^2} \right) \phi^{(n)}(x) = 0,$$

es decir, los  $\phi^{(n)}(x)$  son campos en 4-dimensiones que satisfacen Klein-Gordon con masas

$$m_n^2 = \frac{n^2}{R^2}.$$

Por lo tanto, si el radio de compactificación es lo suficientemente pequeño **todos** los modos no triviales serán muy masivos y pueden ser ignorados de la fenomenología.

Hasta ahora solo se está hablando de la compactificación de una dimensión extra a  $S^1$ . Más adelante discutiremos que esto es una propiedad general en la compactificaciones toroidales de las teorías de gravedad pura: todos los modos no-triviales son masivos, con masas del orden de la escala introducida por la compactificación.

Como ejemplo radical de la existencia de modos no-triviales y no-masivos está la teoría de cuerdas. Para tamaños muy específicos de compactificaciones toroidales de la cuerda aparecen, como se explicará más adelante en este Capítulo, modos no-masivos. Este fenómeno se denomina *aumento de simetría* y será explicado en detalle en la sección 1.3 y se debe a la naturaleza de objeto extendido de la cuerda.

### 1.1.2. Simetrías y Cargas

La aparición de un vector no-masivo en la acción luego de la compactificación trae consigo la aparición de simetrías de gauge, siendo en este caso un  $U(1)$  por ser un único vector. Estudiemos con más detalle el origen de ésta simetría.

En 5 dimensiones, por ser la acción de Einstein-Hilbert, están los difeomorfismos como simetría, es decir

$$x_{\hat{\mu}} \rightarrow x_{\hat{\mu}} + \xi_{\hat{\mu}}(x_\mu, x_5)$$

donde el parámetro  $\xi_{\hat{\mu}}$  es una función cualquiera de las coordenadas. Por otro lado, habiendo realizado la compactificación a 4 dimensiones, aparece en principio, una simetría de gauge y difeomorfismos en 4-dimensiones. Claramente la compactificación rompe parte de los difeomorfismos en  $D = 5$  pues la geometría de una de las coordenadas ha cambiado. Ahora los difeomorfismos deben respetar, por ejemplo, la periodicidad de la quinta coordenada. Por lo tanto, las transformaciones de coordenadas lucen ahora de

la siguiente manera:

$$x_{\hat{\mu}} \rightarrow x'_{\hat{\mu}} = x_{\hat{\mu}} + \xi_{\hat{\mu}}(x_{\mu}, x_5)$$

$$\xi_{\hat{\mu}}(x_{\mu}, x_5) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_{\hat{\mu}}^{(n)}(x_{\mu}) e^{inx_5}$$

donde queda explícito que  $\xi_{\hat{\mu}}$  no puede ser cualquier función, sino que debe respetar la periodicidad de  $x_5$ .

Teniendo lo anterior presente, veamos cual es el origen de la simetría de gauge  $U(1)$ . Una de las posibles transformaciones de coordenadas en 5 dimensiones es

$$x_5 \rightarrow x_5 + \frac{\sqrt{16\pi G}}{R} \epsilon(x).$$

Sabiendo que  $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  ante difeomorfismos en 5 dimensiones, transforma según

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \rightarrow g_{\hat{\mu}'\hat{\nu}'} \frac{\partial x'^{\hat{\mu}'}}{\partial x^{\hat{\mu}}} \frac{\partial x'^{\hat{\nu}'}}{\partial x^{\hat{\nu}}}$$

podemos leer de aquí como transforman sus componentes, en particular vemos que, en el modo cero de los vectores produce

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\epsilon(x)$$

es decir, la simetría de gauge es producto de los difeomorfismos a lo largo de la 5 coordenada, en particular de una traslación a lo largo de la misma.

Desde ya, esta transformación, por ser difeomorfismo, afecta a los modos masivos de los campos, por lo tanto se deduce que éstos están cargados frente a la simetría de gauge. Veamos ahora cual es la carga de los mismos.

Tomando nuevamente al campo genérico  $\phi(x, x_5)$  como partida, vemos a partir del desarrollo de Fourier del mismo que ante este cambio de coordenadas

$$x_5 \rightarrow x_5 + \frac{\sqrt{16\pi G}}{R} \epsilon(x)$$

$$\phi^{(n)}(x) \rightarrow e^{in \frac{\sqrt{16\pi G}}{R} \epsilon(x)} \phi^{(n)}(x)$$

y como tal transformación da lugar a simetría de gauge, los  $\phi^{(n)}(x)$ , vistos desde 4 dimensiones, están cargados frente a la misma con carga

$$q_n = -\sqrt{16\pi G} \left( \frac{n}{R} \right).$$

Es decir, las cargas crecen con el número de modo y, más aún, son proporcionales a la masa de los estados. Al incluir estos estados en la acción deben aparecer de forma covariante ante las simetrías, i.e. con derivadas  $\mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} + iq_n A_{\mu}(x)$ .

Algo que resta discutir aún es qué tipo de transformaciones inducen los modos no triviales de los difeomorfismos. Una buena discusión al respecto puede encontrarse en [5]. Básicamente no todos los modos son simetrías reales, ya que el valor de expectación de los campos

$$\begin{aligned}\langle g_{\mu\nu} \rangle &= \eta_{\mu\nu} \\ \langle \Phi \rangle &= R\end{aligned}$$

debe preservarse ante cualquier difeomorfismo. De esta manera, tales valores de expectación producen una suerte de ruptura espontanea de simetría (ciertos modos de los difeomorfismos). Como en toda ruptura, ciertos grados de libertad se transforman en bosones de Goldstone y son absorbidos por otros campos. En este caso lo que resulta es que no existen modos masivos de los vectores ni del escalar, i.e. los grados de libertad  $A_\mu^{(n)}(x)$  y  $\Phi^{(n)}(x)$  son absorbidos por los modos  $g_{\mu\nu}^{(n)}(x)$ , mediante redefinición de los campos, quedando los últimos con el número de grados de libertad correspondiente a un 2-tensor simétrico masivo en 4 dimensiones. En el Capítulo 2 algo similar ocurrirá en DFT por lo que se dará una discusión detallada de este mecanismo.

## Compactificaciones más generales

Empecemos notando que en el caso de partir de una acción en  $D$  dimensiones y compactificar  $r$  de ellas a un toro  $T^r$  producirá resultados análogos al del círculo:  $r$  vectores de gauge  $A_\mu^b$ , con  $b = 1, 2, \dots, r$  donde la simetría asociada es  $U(1)^r$ , uno por cada traslación interna que pueda realizarse; además cargas y masas resultan totalmente análogas.

Una pregunta más general es qué tipo de grupos de gauge pueden obtenerse en una compactificación. Para Toros, como ya se mencionó, resulta ser siempre el grupo abeliano  $U(1)^r$ , pero si tenemos  $r$  coordenadas internas compactificadas en una variedad  $\mathcal{M}_G$ , siendo  $G$  el grupo de isometrías de la variedad, tendremos que los difeomorfismos a lo largo de las direcciones isométricas dar lugar en bajas dimensiones a transformaciones de gauge donde el grupo resultante coincide con  $G$ . En concreto, existen transformaciones de coordenadas parametrizadas con vectores de Killing  $\xi_b^m$  que satisfacen

$$\xi_b^m \partial_m \xi_c^n - \xi_c^m \partial_m \xi_b^n = -C_{abc} \xi_a^n$$

donde el índice  $m$  cuenta la cantidad de transformaciones y el índice  $b = D - r, D - r + 1, \dots, D$  barre sobre las direcciones internas y  $C_{abc}$  son las constantes de estructura del grupo asociado al grupo de isomerías de la variedad. Estos vectores de Killing son los responsables de generar transformaciones de gauge no abelianas sobre los vectores  $A_\mu^b$ . Entonces, por ejemplo, si quisieramos obtener un lagrangiano con vectores de gauge en  $SU(2) \times U(1)$  podríamos compactificar en las coordenadas sobre la variedad producto

$S^2 \times S^1$ , necesitando un total de  $3 + 1 = 4$  direcciones interas. Los estados masivos están cargados frente al grupo  $G$  y por lo tanto se rearmen en multipletes del mismo.

Pueden utilizarse compactificaciones sobre variedades cociente para obtener así otros grupos de simetría de gauge, pero es importante enfatizar que si quiere conseguirse un grupo no-abeliano la variedad de compactificación no puede ser un Toro. Para más información ver [5].

## 1.2. Compactificaciones Scherk-Schwarz

Existe otra manera de realizar una reducción dimensional propuesta por Scherk-Schwarz en [6]. La idea es hacer que la dependencia en las coordenadas internas de los campos en altas dimensiones sea de una determinada manera, dada por las simetrías de la acción. Dos tipos de simetrías se pueden utilizar para tal reducción:

- Simetrías Globales/Internas
- Simetrías Locales/Externas

Solo la primera será relevante en esta Tesis. Empecemos con un ejemplo sencillo: Simetría Global  $U(1)$ . Supongamos, nuevamente, que nuestro modelo de prueba consiste en una teoría con un escalar en altas dimensiones con una dimension interna , i.e.  $\Phi(x^\mu, y)$ . Luego la simetría transforma al escalar según  $\Phi \rightarrow e^{i\Lambda}\Phi$ , por lo que al aparecer una fase en el nuevo campo, permitiremos una generalización de la periodicidad de los campos, permitiendo una fase en la misma:

$$\Phi(x^\mu, y + 2\pi R) = e^{2\pi i m R} \Phi(x^\mu, y)$$

Luego, al igual que en el caso de Kaluza-Klein, al tener que respetar la periodicidad, el campo debe descomponerse como

$$\Phi(x^\mu, y) = e^{imy} \sum_n \Phi^{(n)}(x^\mu) e^{iny/R}$$

En el límite  $R \rightarrow 0$  el sector no masivo se desacopla y resulta, de la anterior expresión,

$$\Phi(x^\mu, y) = e^{imy} \Phi^{(0)}(x^\mu)$$

la cual puede ser obtenida también, si se reemplaza el parámetro  $\Lambda = my$ , que desde el punto de vista de las dimensiones espacio-temporales sigue siendo una transformación Global. Notar que de esta manera, la reducción luce similar al método de separación de variables que se enseña en cálculo inicial: La función original se separa en el producto

de dos funciones, una dependiendo solo de un subconjunto de coordenadas y la otra del resto.

Más en general, si la simetría global viene dada por un grupo  $G$ , luego su acción sobre los campos viene dada por  $\Phi \rightarrow g(\Phi)$ , y por lo tanto la dependencia de los campos en las coordenadas sería:

$$\Phi(x^\mu, y) = g_y \Phi(x^\mu), \quad g_y = g(y) \in G$$

Esta manera particular garantiza que la teoría efectiva sea independiente de la coordenada interna.

En DFT, resulta ser  $G = O(d, d)$ . En el Capítulo 3 mostraremos el caso de este tipo de reducción dimensional aplicada a DFT.

### 1.3. Teoría de Cuerdas

Una partícula puntual es caracterizada por una posición en el espacio-tiempo  $x^\mu(\tau)$  parametrizada con algún parámetro afín  $\tau$  que describe la trayectoria de la misma. Por analogía, una cuerda también está caracterizada por una posición  $X^\mu(\tau, \sigma)$  solo que en este caso son necesarios dos parámetros  $(\tau, \sigma)$  para describir la trayectoria. Se puede pensar que uno de los parámetros  $\tau$  describe el avance de la cuerda por el espacio-tiempo y el otro  $\sigma$  recorre cada punto de la cuerda<sup>9</sup>, donde a este último se lo puede tomar en el intervalo  $[0, \pi]$ . Al avanzar por el espacio-tiempo la partícula dibuja una trayectoria unidimensional mientras que la cuerda una superficie bidimensional.

La acción más simple para la partícula puntual es aquella que propone extremar el intervalo, i.e  $S = \int ds$ . Puede pensarse entonces una acción equivalente para la cuerda, donde lo que se extreme sea la superficie bidimensional que describe al moverse. A ésta se la conoce con el nombre de acción de Nambu-Goto. En Teoría de Cuerdas esta no es la acción que se utiliza para trabajar por ser muy difícil de cuantizar<sup>10</sup>, y en su lugar se utiliza una acción clásicamente equivalente, la acción de Polyakov, que se muestra a continuación

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{ab} G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu,$$

los índices latinos barren sobre los dos parámetros  $(\tau, \sigma)$ , la métrica bidimensional  $h_{ab}$  actúa como campo auxiliar que al ser integrado transforma la acción de Polyakov en la de Nambu-Goto,  $G_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio-tiempo<sup>11</sup>. La constante  $\alpha'$  introduce

<sup>9</sup>Aquí es donde se nota matemáticamente el carácter de objeto extendido de la cuerda.

<sup>10</sup>La raíz cuadrada que aparece hace inmanejable la cuantización estándar.

<sup>11</sup>Usualmente para comenzar se la toma como  $\eta_{\mu\nu}$ , pero bien podría ser distinta, incluso llegando a depender de las coordenadas  $X^\mu$ . También puede ponerse, y de hecho se hará más adelante, un background de un tensor antisimétrico  $B_{\mu\nu}$  y de un escalar llamado dilatón.

una escala en la teoría, y siendo sus unidades las de longitud cuadrado, se trata de la longitud característica de la cuerda.

Por como queda escrita la acción de Polyakov, los  $X^\mu(\tau, \sigma)$  juegan un doble papel físico: Son las coordenadas de la cuerda en el espacio-tiempo y al mismo tiempo desde el punto de vista de la acción son campos viviendo en dos dimensiones  $\tau, \sigma$ . Vistos como campos hay tantos de ellos como dimensiones del espacio-tiempo haya.

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange se encuentran las ecuaciones de movimiento para el campo de la cuerda, que no es otra cosa que la ecuación de ondas

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X_\mu(\tau, \sigma) = 0$$

más condiciones de borde que dependen de la topología de cuerda, es decir, si la cuerda es abierta o cerrada<sup>12</sup>. En esta Tesis solo se trabaja con cuerdas cerradas, por lo tanto a partir de aquí todo estará referido a ellas.

Las soluciones a la anterior ecuación son las usuales en ondas,  $X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau - \sigma) + X_R^\mu(\tau + \sigma)$  donde

$$\begin{aligned} \hat{X}_L^\mu(\tau - \sigma) &= \hat{x}_L^\mu + \frac{\alpha'}{2}(\tau - \sigma) \hat{p}_L^\mu + \sqrt{\frac{\hbar \alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \hat{\alpha}_m^\mu e^{-im(\tau - \sigma)} \\ \hat{X}_R^\mu(\tau + \sigma) &= \hat{x}_R^\mu + \frac{\alpha'}{2}(\tau + \sigma) \hat{p}_R^\mu + \sqrt{\frac{\hbar \alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu e^{-im(\tau + \sigma)} \end{aligned}$$

y donde además se ha colocado ya el típico “sombrero” de operador para no tener que cambiar de notación a la hora de cuantizar los campos. La combinación  $x^\mu = x_R^\mu + x_L^\mu$  representa el centro de masa de la cuerda, mientras que  $p^\mu = p_R^\mu + p_L^\mu$  resulta el impulso de centro de masa de la cuerda<sup>13</sup>. Finalmente los  $\alpha_m^\mu$  y  $\tilde{\alpha}_m^\mu$  son las amplitudes de oscilación de los modos (izquierdo y derechos)  $m$  en la dirección  $\mu$  del espacio-tiempo.

Al realizar la cuantización canónica estandar se encuentran las siguientes relaciones de conmutación<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} [\hat{x}^\mu, p_\nu] &= i\hbar \delta_\nu^\mu \\ [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] &= m \delta_{n+m} G^{\mu\nu} \\ [\hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\nu] &= m \delta_{n+m} G^{\mu\nu} \end{aligned}$$

donde el resto de conmutadores son nulos<sup>15</sup>. Como es de esperar los  $\alpha_m^\mu$  se transforman en operadores de creación y destrucción de modos de vibración de la cuerda<sup>16</sup>. Tales

<sup>12</sup>Para la cuerda cerrada se cumple que  $X_\mu(\tau, 0) = X_\mu(\tau, \pi)$  siempre y cuando la dimension  $\mu$  no sea compacta

<sup>13</sup>Puede probarse a partir de la acción que éste es una cantidad conservada

<sup>14</sup>A partir de aquí  $G_{\mu\nu}$  es constante.

<sup>15</sup>Salvo para los conmutadores entre momentos y coordenadas L y R, que son analogos al primer conmutador

<sup>16</sup>Existe un detalle que no será discutido aquí, que tiene que ver con el signo que aparece en el

operadores, como de costumbre, tienen asociados operadores de número que cuentan la cantidad de modos creados

$$N = \sum_{m>0} \hat{\alpha}_{-m} \cdot \hat{\alpha}_m$$

$$\bar{N} = \sum_{m>0} \hat{\tilde{\alpha}}_{-m} \cdot \hat{\tilde{\alpha}}_m$$

Siendo  $p_\mu$  el impulso del centro de masa de la cuerda, la masa de la misma viene dada por  $m^2 = -p^2$ , y utilizando los vínculos que impone las condiciones de contorno de la cuerda cerrada puede mostrarse que

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'} (N + \bar{N} - 2)$$

donde además los vínculos que deben cumplirse son tan importantes que reciben nombre propio: condición LMC (por sus siglas en ingles *Level Matching Condition*), siendo ésta

$$N - \bar{N} = 0.$$

Podemos entonces analizar el espectro de partículas de la teoría. Notar que cada modo de oscilación produce un nuevo estado, por lo que las partículas en Teoría de Cuerdas están asociadas a vibración de la cuerda. Cada modo de vibración produce una nueva partícula. Lo primero que notamos es algo indeseable, el estado de menor masa posible corresponde a  $N = \bar{N} = 0$  y masa  $m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$ , es decir un *taquión*. Los taquiones introducen inestabilidades en la teoría, además de otros problemas, como violación de causalidad. Se lo interpreta como una elección inadecuada del vacío en la teoría. En adelante ignoraremos a dicho estado, pues cuando se introduzca supersimetría (las supercuerdas) este estado desaparecerá.

En el siguiente nivel de masas se encuentran aquellos estados que son no-masivos, quienes satisfacen  $N = \bar{N} = 1$  con masa  $m^2 = 0$ . Estos estados son probablemente los mas importantes para la teoría de cuerdas por su impacto físico. Al ser no-masivos serán quienes gobiernen la física a bajas energías. Notar que siendo  $\alpha'$  la escala de la teoría, si la cuerda describiera partículas del modelo standard, debería ser esta escala extremadamente pequeña (pues tiene unidades de longitud, y debe ser al menos, más chica que la partícula fundamental de menor tamaño). En unidades naturales  $\alpha'$  introduce una escala de energía en la teoría, y por lo anterior debe ser extremadamente alta. Por lo tanto toda la física de bajas energías estará controlada, como se dijo, por el sector no-masivo.

A diferencia del taquión, los estados no-masivos tienen osciladores, y más precisa-

---

conmutador cuando se miran para  $\mu = \nu = 0$ . Para un mayor detalle ver [7–9]

mente tienen un oscilador de cada tipo. Si representamos al vacío de la teoría con  $|k\rangle$ <sup>17</sup>, donde  $k$  resulta ser el impulso del centro de masa, entonces los estados no-masivos resultan

$$\epsilon_{\mu\nu} \hat{\alpha}^\mu \hat{\alpha}^\nu |k\rangle$$

donde  $\epsilon_{\mu\nu}$  es un tensor de polarización que sirve para denotar al estado más general posible. Para saber a qué partículas representan estos estados es necesario descomponerlos en representaciones irreducibles del grupo de Poincaré. Para un tensor genérico  $\epsilon_{\mu\nu}$  la descomposición en irreps resulta ser

$$\epsilon_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \oplus b_{\mu\nu} \oplus \Phi$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es un tensor simétrico sin traza,  $b_{\mu\nu}$  es una 2-forma y  $\Phi$  es un escalar<sup>18</sup>. Por lo tanto, el sector no-masivo de la cuerda contiene a tres partículas. Al escalar  $\Phi$  se lo llama dilatón, mientras que a  $g_{\mu\nu}$  se lo llama gravitón. La razón para el nombre de este último tiene que ver, como se explicará más adelante, con que en la acción efectiva de bajas energías que describe a estos estados,  $g_{\mu\nu}$  se corresponde exactamente con las fluctuaciones de la métrica del espacio-tiempo<sup>19</sup>.

El resto de los estados de la cuerda se corresponden a  $N = \bar{N} > 1$ , por lo tanto sus masas resultan ser  $m^2 > \frac{4}{\alpha'}$ , es decir, son partículas que aparecerán a escalas de energía muy altas. Es bastante intuitivo que si se agregan osciladores la masa de los estados incrementará, pues contribuyen a su energía “interna”.

Con todo lo anterior presente, estamos en condición de hablar de uno de los mayores problemas que enfrenta la Teoría de Cuerdas. Si uno estudia las simetrías de la acción de Polyakov descubrirá que las cuerdas presentan, entre otras, simetría *conforme*. Por ser una teoría de campos en dos dimensiones y conforme clásicamente posee todas las características de las CFT (Conformal Field Theories). En el proceso de cuantización aparecen *anomalías* que rompen a la simetría conforme como tal en la teoría cuántica. Si se quiere eliminar la anomalía, es necesario tener un número muy específico de campos en la teoría: exactamente 26. Siendo el índice  $\mu$  en  $X^\mu(\tau, \sigma)$  quien barre sobre el número de campos, resulta que es necesario que el espacio-tiempo sea 26-dimensional. Es decir, la Teoría de Cuerdas parece necesitar 22 direcciones espaciales además de las usuales. Si las cuerdas pretenden ser una descripción más fundamental del Modelo Standard, entonces este problema debe ser resuelto de alguna manera. Una de ellas es la que se presenta a continuación.

<sup>17</sup>Es decir,  $|k\rangle$  es autoestado del operador impulso del centro de masa  $\hat{p}^\mu$

<sup>18</sup>Típica descomposición de una matriz en suma de simétrica antisimétrica y traza.

<sup>19</sup>Uno puede intuir esto de otra manera: en cuerdas puede definirse un operador spin y ver que  $g_{\mu\nu}$  tiene spin 2 y es no-masivo. Luego debe tratarse de gravitones. Éste es por lejos el mayor éxito de la Teoría de Cuerdas, i.e. involucrar a la gravedad como fuerza cuántica.



## Compactificaciones, Winding y T-Dualidad

La idea de compactificar en Teoría de Cuerdas es completamente análoga a la ya explicada compactificación tipo Kaluza-Klein. Mostraremos aquí el caso de una dimensión compactificada a  $S^1$  con radio  $R$  para ver el tipo de propiedades que emergen. Nueva física aparecerá al ser la cuerda un objeto extendido y no un punto. Más adelante nos explayaremos más sobre compactificaciones de más dimensiones sobre variedades genéricas. En particular interesa el caso de aquellas toroidales, por ser el objeto de estudio de esta Tesis.

Llamemos a la dimensión interna  $Y(\tau, \sigma) = X^{25}(\tau, \sigma)$ . Por ser  $S^1$  periódica, debe satisfacerse  $y y + 2\pi R$ . La cuerda ahora presenta un nuevo fenómeno: puede enrollarse a lo largo de la variedad, i.e. empezar en un punto y cerrarse de tal manera de no ser homotópica a un punto. Se dice que las cuerdas que presenten este fenómeno tienen *winding*. Cuerdas con número de vueltas  $m$  alrededor de la variedad no son homotópicas entre sí, por lo que se dice que tienen distinto número de winding<sup>20</sup>.

Para una cuerda cerrada con número winding  $m$ , se debe satisfacer que

$$Y(\tau, \sigma + \pi) = Y(\tau, \sigma) + 2\pi m R$$

esto, como veremos ahora, tendrá implicaciones en las soluciones a la ecuación de movimiento para  $Y(\tau, \sigma)$ .

Siendo la compactificación del estilo  $\mathcal{M}^{26} = \mathcal{M}^{25} \times S^1$ , la acción de Polyakov queda diagonal y de allí surge que la ecuación de movimiento para  $Y(\tau, \sigma)$  sigue siendo la misma que antes. Solo las soluciones deben cambiar para tener en cuenta el winding. La forma más general de la solución queda como  $Y(\tau, \sigma) = Y_L(\tau - \sigma) + Y_R(\tau + \sigma)$

$$\begin{aligned}\hat{Y}_L(\tau - \sigma) &= \hat{y}_L + \frac{\alpha'}{2}(\tau - \sigma) \hat{p}_L + \sqrt{\frac{\hbar\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \hat{\alpha}_m e^{-im(\tau - \sigma)} \\ \hat{Y}_R(\tau + \sigma) &= \hat{y}_R^\mu + \frac{\alpha'}{2}(\tau + \sigma) \hat{p}_R + \sqrt{\frac{\hbar\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \hat{\alpha}_m e^{-im(\tau + \sigma)}\end{aligned}$$

donde ahora  $\hat{p}_L$  y  $\hat{p}_R$  deben ser independientes y pueden ser escritos como

$$\begin{aligned}\hat{p}_L &= \hat{p} + \hat{w} \\ \hat{p}_R &= \hat{p} - \hat{w}\end{aligned}$$

siendo  $\hat{p}$  el operador momento interno de Kaluza-Klein a lo largo de  $S^1$  y  $\hat{w}$  el operador winding. De esta manera se satisface  $Y(\tau, \sigma + \pi) = Y(\tau, \sigma) + 2\pi m R$ . Vale la pena notar

---

<sup>20</sup>Se define el winding  $w = m \frac{R}{\alpha'}$  para que quede con unidades de momento. Más adelante se verá la utilidad.

que si los momentos  $L$  y  $R$  son independientes, entonces  $\hat{y}_L$  y  $\hat{y}_R$  también lo son, y podemos definir entonces las combinaciones

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{y}_L + \hat{y}_R \\ \hat{\bar{y}} &= \hat{y}_L - \hat{y}_R\end{aligned}$$

donde inmediatamente identificamos a  $\hat{y}$  con la coordenada centro de masa de la cuerda. La otra combinación  $\hat{\bar{y}}$  es independiente y jugará un papel fundamental en DFT y toda la Tesis. Más adelante en esta Sección se explicará su importancia.

Nuevamente, los estados estarán contruídos con osciladores actuando sobre el estado fundamental  $|p, w\rangle$ , el cual viene caracterizado por el momento interno y el winding. El sector no masivo resulta el mismo<sup>21</sup> que antes para  $p = w = 0$ , solo que ahora la descomposición en irreps del grupo de Poincare de  $\epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  arroja vectores y escalares en la expansión de los índices  $\hat{\mu} = (\mu, 25)$

$$\epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = g_{\mu\nu} \oplus b_{\mu\nu} \oplus \Phi \oplus A_\mu \oplus \tilde{A}_\mu \oplus \phi.$$

Aparecen dos vectores en lugar de uno pues uno proviene de la compactificación de los gravitones y el otro de la 2-forma. Por otro lado, aparece solo el escalar  $\phi$  proveniente del gravitón, pues en una dimensión compacta la 2-forma no contribuye (al ser antisimétrica  $b_{25\ 25} = 0$ ).

Realizando cálculos similares a los que se usan para deducir la fórmula de masa de los estados y la LMC, se deduce que los equivalentes para este caso son, para la masa

$$m^2 = \left(\frac{p}{R}\right)^2 + \left(\frac{w}{\tilde{R}}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2)$$

donde  $\tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}$ , y para la LMC

$$\bar{N} - N = pw.$$

La contribución a la masa del momento de  $p$  es la misma que es las compactificaciones de Kaluza-Klein como era de esperarse. La contribución de los winding<sup>22</sup> es similar a la de  $p$ , como si éstos fuesen momentos internos en un radio de compactificación  $\tilde{R}$ . Esto no es coincidencia, sino una consecuencia profunda de una propiedad característica de las cuerdas que discutiremos a continuación: La T-Dualidad.

Mirando la fórmula de masa se puede ver rápidamente que la transformación que interaccambia momento  $p$  con winding  $w$  la deja invariante, siempre y cuando  $R \leftrightarrow \tilde{R}$ . Puede mostrarse que esta transformación no es solo simetría de la fórmula de masa,

<sup>21</sup>En el Capítulo 3 se mostrará que los winding pueden afectar el contenido de campos del sector no-masivo de las cuerdas para tamaños de compactificación muy especiales.

<sup>22</sup>Que mayor winding mayor masa es también esperable clásicamente, ya que estirar la cuerda para enrollarla aumenta su energía interna.

sino una dualidad de la teoría completa. Esta es la T-Dualidad para el caso del círculo: relaciona la Teoría de Cuerdas compactificada en un radio  $R$  con otra compactificada en radio  $\tilde{R}$ . Por lo tanto muestra que las cuerdas no ven esencialmente una diferencia entre compactificaciones con radio pequeño o grande.

En la teoría dual, los winding juegan el papel de momentos internos en la variedad con radio  $\tilde{R}$ . Luego una pregunta inmediata sería cuál es la variable canónica conjugada a estos “momentos”, es decir, cuál es el espacio Fourier-dual a éstos, y mirando en profundidad la transformación se deduce que se trata de  $\tilde{y}$ . Es por esto que a  $\tilde{y}$  se la denomina *coordenada dual* a  $y$ . Por esto, conviene llamar  $\tilde{p} = w$  para hacer menos pesada la notación.

## Compactificaciones en Toros Genéricos

Si en lugar de compactificar una dimensión compactificamos  $n$  sobre un toro  $T^n$ , mucho del razonamiento anterior permanecerá casi intacto. El sector no-masivo quedará análogo, solo que esta vez con  $2n$  vectores y más módulos. Habrá  $n$  momentos internos  $p_a$  y  $n$  windings  $\tilde{p}^a$ , a los que conviene sintetizar en un momento *doble*

$$\mathbb{P}_A = (p_a, \tilde{p}^a)$$

el cual resulta Fourier-dual a  $\mathbb{Y}^A = (y^a, \tilde{y}_a)$ . La relación entre éstos y los correspondientes L y R se dará más adelante en la Tesis cuando sea necesario utilizarlos.

Hay un detalle que es necesario mencionar pues será de relevancia: al ser  $b_{\mu\nu}$  un estado no-masivo, puede pensarse que en las direcciones internas haya un vev del mismo  $B_{ab}$  además de  $G_{ab}$  (vev de la métrica en el  $T^n$ ). Esto modifica la acción de Polyakov agregando un término de la siguiente manera

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} (G_{ab} + B_{ab}) \partial_\alpha Y^a \partial_\beta Y^b,$$

Esto termina modificando la relación entre momentos L y R con  $\mathbb{P}$ , y como se dijo, su expresión exacta será dada durante el desarrollo de los Capítulos específicos de la Tesis cuando sea necesario utilizarla.

La fórmula de masa y la LMC quedan en este caso

$$m^2 = \mathbb{P} \cdot \mathcal{H} \cdot \mathbb{P} + \frac{2}{\alpha'} (N + \bar{N} - 2)$$

y

$$\bar{N} - N = \mathbb{P}_A \eta^{AB} \mathbb{P}_B$$

respectivamente. A  $\mathcal{H}_{AB}$  se la llama *métrica generalizada* y está construída a partir de

los vev de los módulos mediante

$$\mathcal{H}_{AB} = \begin{pmatrix} G_{ab} - B_{ac}G^{cd}B_{db} & B_{ac}G^{cb} \\ -G^{ac}B_{cb} & G^{ab} \end{pmatrix}$$

mientras que a  $\eta^{AB}$  es la métrica de  $O(n, n)$  definida por

$$\eta^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & id_{n \times n} \\ id_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}$$

Resulta además  $\mathcal{H}_{AB}$  ser una representación de  $O(n, n)$ , por lo que podemos ver ahora de la fórmula de masa que la T-Dualidad toma una forma mucho más rica: relaciona compactificaciones cuyos módulos estén relacionados por una transformación de  $O(n, n)$ . Entraremos en detalle en la sección de DFT en este Capítulo.

## Operadores de Vértice

Existe un mapeo muy útil entre estados de la cuerda y operadores de la CFT que a continuación se presentan. Para osciladores resulta

$$\begin{aligned} \alpha_{-n}^{\hat{\mu}} &\sim \frac{2}{\alpha'} \frac{i}{(n-1)!} \partial^n X^{\hat{\mu}} \\ \tilde{\alpha}_{-n}^{\hat{\mu}} &\sim \frac{2}{\alpha'} \frac{i}{(n-1)!} \bar{\partial}^n X^{\hat{\mu}} \end{aligned}$$

mientras que para el estado con fundamental  $|k\rangle$ , el cual transporta momento  $k^\mu$ , resulta

$$|k\rangle \sim : e^{ik \cdot X(\tau, \sigma)} :$$

Veamos esto en un ejemplo concreto, el cual de paso motivará la construcción de DFT y de resultados de esta Tesis. Supongamos que tomamos un estado con  $N = \bar{N} = 1$  (podrían ser externos o internos, pero tomaremos externos arbitrariamente), y por lo tanto con<sup>23</sup>  $\mathbb{P}^2 = 0$  de tal manera que alguno de los momentos internos y/o windings es no trivial. Estaríamos hablando del estado

$$\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |k, \mathbb{P}\rangle$$

Por lo que su operador de vértice asociado sería

$$\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |k, \mathbb{P}\rangle \sim \epsilon_{\mu\nu} : \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ik \cdot X} e^{ip_a Y^a} e^{i\tilde{p}^a \tilde{Y}_a} : = \epsilon_{\mu\nu} : \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ik \cdot X} e^{i\mathbb{P} \cdot \mathbb{Y}} :$$

donde la igual vale siempre y cuando  $[Y, \tilde{Y}] = 0$ , lo cual parece bastante esperable,

<sup>23</sup>El cuadrado está hecho con la métrica  $\eta_{AB}$ .

pero como veremos en el Capítulo 5, esto no es así si se quiere evitar introducir ciertos cociclos en la teoría. Esto resultará de vital importancia para todo Capítulo 5.

Si miramos desde otra perspectiva a este vértice, notamos que tanto momentos internos  $p_a$  como windings están en pie de igualdad (T-Dualidad manifiesta), literalmente es como si los vértices de los estados de la cuerda vieran un *espacio interno doble*  $\mathbb{Y}$ . Esta es una de las principales razones para la propuesta de DFT, donde el espacio en el que viven los campos es doble. Ampliaremos más al respecto en la sección de DFT más adelante.

Por otro lado, además de sugerir el espacio doble, estos vértices sugieren que los correspondientes campos en DFT que los describan deben ser desarrollados en Fourier de una manera muy particular: Dependiendo del campo, el desarrollo en momentos internos dobles  $\mathbb{P}$  no puede contener todos los valores posibles, pues estos últimos deben satisfacer la LMC (que depende justamente del estado). A este desarrollo en modos lo llamaremos expansión en modos de Kaluza-Klein *generalizados*. Tanto en los Capítulos 2 como 5 ampliaremos al respecto.

Finalmente, la construcción de los vértices es útil para los cálculos de amplitudes de scattering entre estados de la cuerda. Supongamos que queremos calcular la amplitud de scattering entre tres estados de la cuerda caracterizados por vértices  $V_i(\tau_i, \sigma_i)$ , con  $i = 1, 2, 3$ , luego ésta viene dada por

$$\left( \prod_i \int_{\Sigma} d\sigma_i d\tau_i \right) \langle V_1(\tau_1, \sigma_1) V_2(\tau_2, \sigma_2) V_3(\tau_3, \sigma_3) \rangle$$

donde la integral se hace<sup>24</sup> pues la amplitud no puede depender de las posiciones no-físicas  $(\tau, \sigma)$ . Por otro lado, el valor de expectación se realiza de forma usual con la integral de camino. En este proceso, la métrica auxiliar  $h^{\alpha\beta}$  también debe ser integrada. Al estar en dos dimensiones con invariancia ante difeomorfismos, se puede mostrar que la integral en  $h^{\alpha\beta}$  se reduce a una suma sobre topología de  $\Sigma$ . Esto tiene una interpretación muy física e importantísima en Teoría de cuerdas: Primero, descompone a la integral en camino en una serie perturbativa donde cada término corresponde a una topología de  $\Sigma$  dada por el número de “genus” (manijas) de la misma; segundo, cada término se corresponde con un tipo de diagramas de Feynmann en las teorías de campos. En toda esta Tesis los cálculos de amplitudes se hará a primer orden en topología, que corresponde a la esfera y diagramas del tipo árbol en la teoría de campos efectiva. Para una discusión más detallada sobre cálculo de amplitudes en cuerdas ver [7].

Un último detalle a tener en cuenta con los operadores de vértice es el llamado *coci-*

---

<sup>24</sup>Los vértices pueden interpretarse como inserciones de estados en una posición. Luego la amplitud debe integrar sobre todas las posibles posiciones.

clo. Por una cuestión de autoconsistencia en la Teoría de Cuerdas, es necesario agregar a los vértices un factor  $\hat{C}_{\mathbb{K}}$ , el cuál es una función del momento doble  $\mathbb{K}$  del estado y del **operador momento doble**  $\hat{\mathbb{P}}$ . Si se los agrupa con la parte del vértice que transporta momento, i.e.  $e^{i(k_L \cdot x_L + k_R \cdot x_R)}$ , definiendo un operador  $\hat{U}_{\mathbb{K}} = e^{i(k_L \cdot x_L + k_R \cdot x_R)} \hat{C}_{\mathbb{K}}(\hat{p}, \hat{\bar{p}})$ , se satisface el álgebra siguiente

$$\hat{U}_{\mathbb{K}} \hat{U}_{\mathbb{K}'} = \epsilon_{\mathbb{K}, \mathbb{K}'} \hat{U}_{\mathbb{K} + \mathbb{K}'}$$

donde  $\epsilon_{\mathbb{K}, \mathbb{K}'}$  es el llamado *factor cociclo* y viene dado por

$$\epsilon_{\mathbb{K}, \mathbb{K}'} = e^{2\pi i \lambda^2 \tilde{k} \cdot k'}$$

Básicamente los cociclos transforman a los vértices en representaciones proyectivas de los estados. Son indispensables por ejemplo, para reproducir via amplitudes de scattering los correctos acoplamientos entre estados de la cuerda. Veremos en el Capítulo 5 que los cociclos pueden ser reemplazados y eliminados de la teoría al imponer una relación de no-conmutatividad entre los modos cero de la cuerda. Esto tendrá consecuencias en DFT y en particular en el desarrollo de esta Tesis.

## Cuerdas Fermiónicas

Para finalizar esta sección haremos un breve comentario sobre las *supercuerdas*. El tema es tan basto que haría falta un Capítulo solo para discutir cada una de las posibles construcciones, por lo que nos limitaremos solo a mencionar algunos aspectos generales a tener en cuenta y cuales son los principales cambios con respecto a lo que se ha explicado hasta ahora.

Primero que nada: Notar que en los estados de la cuerda que se presentaron anteriormente no ha aparecido ningún fermión. Es por esto que se refiere a la cuerda de la sección como anterior Teoría de Cuerdas Bosónica. Pero si las cuerdas pretenden ser una teoría que describa el Modelo Standard deben contener en su espectro fermiones. Una de las maneras estándar es introducir, via supersimetría, a  $\psi^\mu(\tau, \sigma)$  supercompañero de  $X^\mu(\tau, \sigma)$ . Una de las consecuencias de la supersimetría es que extinguirá a los taquiones de la teoría.

Desde ya, la introducción de  $\psi^\mu(\tau, \sigma)$  tendrá muchas otras consecuencias: Nuevos estados, espectro no-masivo, simetrías, LMC, etc. Quizás una de las nuevas características, que comparten todas las supercuerdas es que, agregar nuevos campos a la acción de Polyakov, la cancelación de anomalías en la teoría cuántica da lugar un nuevo número de dimensiones: en lugar de  $D = 26$  dimensiones, las supercuerdas necesitan  $D = 10$ . Por lo tanto, aún siguen valiendo los argumentos sobre la necesidad de compactificar.

De todas las supercuerdas, solo una presenta el fenómeno de aumentos de simetría en el espacio de módulos al ser compactificada en Toros: La cuerda *Heterótica*. La idea

de la misma es asignarle supercompañero  $\psi_R^\mu(\tau + \sigma)$  solo a  $X_R^\mu(\tau + \sigma)$  en la descomposición  $X^\mu(\tau, \sigma) = X_R^\mu(\tau + \sigma) + X_L^\mu(\tau - \sigma)$ . Al dejar a  $X_L^\mu(\tau - \sigma)$  no-supersimetrizado, las anomalías en la teoría se cancelan diferente para el sector R y L arrojando un número de dimensiones espacio-temporales diferentes para cada sector,  $D = 10$  y  $D = 26$  respectivamente. Para poder seguir interpretando a  $\mu$  como direcciones en el espacio-tiempo es necesario deshacerse de 16 dimensiones (provenientes del sector L). Formalmente, se las compactifica en alguna variedad compacta. De las infinitas posibilidades para la variedad compacta solo dos<sup>25</sup> son permitidas por requerimientos de autoconsistencia de la teoría [8, 9] :  $E_8 \times E_8$  y  $SO(32)$ .

En el Apéndice C.1 se presenta un resumen de las principales fórmulas utilizadas para la Heterótica en los Capítulos siguientes.

## 1.4. Teoría de Campos Dobles (DFT)

Muchas de las propiedades y simetrías de las cuerdas se deben a la naturaleza de objeto extendido de las mismas. En particular, la presencia de un tensor antisimétrico  $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  en el espectro se espera ya que, al ser unidimensional la cuerda se acopla directamente con él. De hecho, una característica distintiva de todas las teorías de cuerdas es que, además de la métrica  $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , el sector gravitacional también incluye al campo Kalb-Ramond  $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  y al dilatón  $\phi$ , de la siguiente manera

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left( R + 4\partial_{\hat{\mu}}\phi\partial^{\hat{\mu}}\phi - \frac{1}{12}H_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}}H^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}} \right), \quad (1.4.1)$$

donde  $H_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}} \equiv \partial_{[\hat{\mu}}B_{\hat{\nu}\hat{\lambda}]}$ . Esta universalidad del sector gravitacional es debida al hecho de que los campos no-masivos del sector NS-NS están contruídos con productos tensoriales de osciladores Left y Right que transforman en la representación fundamental del grupo de Lorentz  $D$ -dimensional  $SO(1, D-1)$ , y por lo tanto, conteniendo los g.d.l. de  $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ,  $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  y  $\phi$  de acuerdo a la descomposición

$$D^2 = \left( \frac{D(D+1)}{2} - 1 \right) \oplus \frac{D(D-1)}{2} \oplus 1. \quad (1.4.2)$$

Cuando el espacio es compacto, las cuerdas pueden contraerse en círculos, dando lugar así a los llamados windings. La presencia de windings y momento interno da lugar a la T-dualidad, que es una característica de las cuerdas, la cual se manifiesta al conectar la física de las cuerdas definidas en espacios geométricos diferentes, dando lugar así a otros fenómenos como aumentos de simetría sobre puntos específicos del espacio de módulos. En compactificaciones toroidales la T-dualidad implica que backgrounds

<sup>25</sup>Deben ser autoduales, y pares

$n$ -dimensionales relacionados por el grupo  $O(n, n, \mathbb{Z})$  son físicamente equivalentes.

En las compactificaciones toroidales de KK de la teoría efectiva gravitatoria, la dualidad aparece como una simetría continua global  $O(n, n, \mathbb{R})$  (1.4.1) cuando solo los modos no-masivos se tienen en cuenta. Al tener en cuenta todos los modos masivos, la simetría se rompe a  $O(n, n, \mathbb{Z})$ .

La teoría de Campos Dobles (DFT) intenta incorporar estas características cuerdas, y en particular la información de los windings, a una teoría de campos [10]-[11]. Inspirada en compactificaciones toroidales, DFT es formulada en una de espacio doble, con coordenadas  $\mathbb{X}^{\mathcal{M}} = (\tilde{x}_{\hat{\mu}}, x^{\hat{\mu}})$ , donde las nuevas coordenadas  $\tilde{x}_{\hat{\mu}}$ , se agregan además de las usuales  $x^{\hat{\mu}}$  (canónicas conjugadas de los momentos internos), como coordenadas canónicas conjugadas de los windings<sup>26</sup>. Aquí  $\mathcal{M} = 0, \dots, 2D - 1$  y  $\hat{\mu} = 0, \dots, D - 1$ . Se construye una acción invariante  $O(D, D)$  en el espacio doble, en el cual la simetría global  $O(D, D)$  es realizada linealmente. La acción construida se arma a introducir un campo llamado métrica generalizada, que incorpora a los g.d.l. de la métrica  $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  y el tensor antisimétrico  $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , y que además transforma como un tensor del grupo  $O(D, D)$ .

Como las teorías de gravedad poseen simetrías (difeomorfismos y transformaciones de gauge de la 2-forma  $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ) es de esperar que DFT también las tenga. De hecho esto es así, se llaman difeomorfismos generalizados, pero la teoría solo está definida bien si se satisfacen ciertas condiciones de consistencia. Una posible condición a imponer es la bien conocida *section condition* o *strong constraint* (SC) que, de forma efectiva, termina eliminando la mitad de las coordenadas (matando toda información posible acerca de los windings). Al imponerla y eligiendo matar a las coordenadas  $\tilde{x}_{\hat{\mu}}$ , la acción de DFT se reduce a (1.4.1) y los difeomorfismos generalizados se reducen a los difeomorfismos estandar y a las transformaciones de gauge de la 2-forma  $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  que dejan invariante a (1.4.1).

Otra posible solución a las restricciones resulta de considerar compactificaciones tipo Scherk-Schwarz generalizadas [12–14]. Vale la pena resaltar que las compactificaciones Scherk-Schwarz de DFT dan lugar a todos los flujos de las teorías de supergravedad gaugeadas (que no se pueden obtener desde compactificaciones efectivas de bajas energías de supergravedades) permitiendo una interpretación geométrica de todos ellos [15] en el espacio doble.

Volviendo a la construcción de DFT, los difeomorfismos generalizados transforman a los tensores de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_V W^{\mathcal{M}\dots\mathcal{N}} = V^{\mathcal{P}} \partial_{\mathcal{P}} W^{\mathcal{M}\dots\mathcal{N}} + (\partial^{\mathcal{M}} V_{\mathcal{P}} - \partial_{\mathcal{P}} V^{\mathcal{M}}) W^{\mathcal{P}\dots\mathcal{N}} + \dots + (\partial^{\mathcal{N}} V_{\mathcal{P}} - \partial_{\mathcal{P}} V^{\mathcal{N}}) W^{\mathcal{M}\dots\mathcal{P}}. \quad (1.4.3)$$

<sup>26</sup>La T-dualidad conecta teorías de cuerdas con diferentes backgrounds geométricos. En el mapeo entre ellos, los estados con momento interno son mapeados a estados con windings. Por lo tanto uno podría pensar que las coordenadas de espacio  $x_{\mu}$  tienen sus correspondientes T-duales  $\tilde{x}^{\mu}$



La métrica natural de  $SO(D, D)$

$$\eta_{\mathcal{MN}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.4)$$

es invariante ante las transformaciones generalizadas de arriba. Esta puede ser descompuesta en una parte definida positiva y una definida negativa,  $\eta|_{C_{\pm}}$ , actuando sobre cada uno de los dos subespacios  $D$ -dimensionales ortogonales del espacio doble  $E = C_+ \oplus C_-$ , que son generadas por las coordenadas  $\mathbb{X}_{\pm}^{\mathcal{M}} = x^{\hat{\mu}} \pm \tilde{x}_{\hat{\mu}}$ . Haciendo uso de  $\eta|_{C_{\pm}}$  una métrica definida positiva puede ser definida en  $E$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{MN}} = \left( \eta|_{C_+} - \eta|_{C_-} \right)_{\mathcal{MN}} = \begin{pmatrix} g^{-1} & -g^{-1} B \\ B g^{-1} & g - B g^{-1} B \end{pmatrix}, \quad (1.4.5)$$

con

$$\mathcal{H}_{\mathcal{MP}} \eta^{\mathcal{PQ}} \mathcal{H}_{\mathcal{QN}} = \eta_{\mathcal{MN}}. \quad (1.4.6)$$

Bajo transformaciones de  $O(D, D)$  denotadas por  $h_{\mathcal{M}}^{\mathcal{P}}$ ,  $\mathbb{X} \rightarrow h\mathbb{X}$  y los campos transforman como

$$\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}(\mathbb{X}) \rightarrow h_{\mathcal{M}}^{\mathcal{P}} h_{\mathcal{N}}^{\mathcal{Q}} \mathcal{H}_{\mathcal{PQ}}(h\mathbb{X}), \quad d(\mathbb{X}) \rightarrow d(h\mathbb{X}) \quad (1.4.7)$$

Los índices se bajan y suben con la métrica  $\eta_{\mathcal{MN}}$  y su inversa  $\eta^{\mathcal{MN}}$ , respectivamente. A veces es útil expresar la métrica  $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$  en términos de un vielbein

$$\mathcal{H}_{\mathcal{MN}} = E^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}} S_{\mathcal{AB}} E^{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}}, \quad E^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} e & e B \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}, \quad (1.4.8)$$

donde  $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = e^a_{\hat{\mu}} s_{ab} e^b_{\hat{\nu}}$ ,

$$S_{\mathcal{AB}} = \begin{pmatrix} s^{ab} & 0 \\ 0 & s_{ab} \end{pmatrix} \quad (1.4.9)$$

y  $s_{ab}$  es la métrica usual  $D$  dimensional de Minkowski. Los índices  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ , son bajados y subidos con la métrica de  $SO(D, D)$  plana definida como

$$\eta_{\mathcal{AB}} = E_{\mathcal{A}}^{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{MN}} E_{\mathcal{B}}^{\mathcal{N}} \quad (1.4.10)$$

y su inversa, respectivamente, la cual coincide numéricamente con (1.4.4).

Dado que la métrica de Minkowski es invariante bajo transformaciones de Lorentz  $O(1, D-1)$ , la métrica  $S_{\mathcal{AB}}$  es invariante bajo transformaciones dobles  $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$  y como resultado la métrica generalizada  $\mathcal{H}$  parametriza el cociente

$$\frac{O(D, D)}{O(1, D-1) \times O(D-1, 1)}. \quad (1.4.11)$$

De la regla de transformación (1.4.3), la métrica generalizada transforma como

$$\mathcal{L}_V \mathcal{H}_{\mathcal{MN}} = V^{\mathcal{P}} \partial_{\mathcal{P}} \mathcal{H}_{\mathcal{MN}} + (\partial_{\mathcal{M}} V^{\mathcal{P}} - \partial^{\mathcal{P}} V_{\mathcal{M}}) \mathcal{H}_{\mathcal{PN}} + (\partial_{\mathcal{N}} V^{\mathcal{P}} - \partial^{\mathcal{P}} V_{\mathcal{N}}) \mathcal{H}_{\mathcal{MP}}. \quad (1.4.12)$$

En términos de  $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$ , y quedandose hasta dos derivadas, la acción de DFT en el espacio  $2D$ -dimensional puede ser expresada como<sup>27</sup>

$$S = \frac{1}{G_{DFT}} \int d^D x d^D \tilde{x} e^{-2d} \mathcal{R}(\mathcal{H}, d), \quad (1.4.13)$$

donde el escalar de Ricci generalizado está dado por [17]

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & 4\mathcal{H}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} \partial_{\mathcal{N}} d - \partial_{\mathcal{M}} \partial_{\mathcal{N}} \mathcal{H}^{\mathcal{MN}} - 4\mathcal{H}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} d \partial_{\mathcal{N}} d + 4\partial_{\mathcal{M}} \mathcal{H}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{N}} d \\ & + \frac{1}{8} \mathcal{H}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} \mathcal{H}^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} \mathcal{H}_{\mathcal{KL}} - \frac{1}{2} \mathcal{H}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} \mathcal{H}^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{K}} \mathcal{H}_{\mathcal{NL}}, \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

y el dilatón generalizado

$$e^{-2d} = e^{-2\phi} \sqrt{-g} \quad (1.4.15)$$

es un escalar de  $O(D, D)$  y  $G_{DFT}$  es la constante de acoplamiento gravitatoria en el espacio doble.

La comparación con cuerdas necesita de la imposición de la LMC

$$\partial_{\mathcal{M}} \partial^{\mathcal{M}} \dots = (N - \bar{N}) \dots, \quad (1.4.16)$$

donde  $N$  y  $\bar{N}$  son los números de osciladores Left y Right de la cuerda, y los puntos suspensivos reemplazan a cualquier campo. Dado que  $g, B$  y  $\phi$  corresponden a  $N = \bar{N} = 1$ , esperaríamos  $N - \bar{N} = 0$ . Sin embargo, en un espacio compacto esta diferencia podría dar un entero no nulo, hecho que es importante para permitir el aumento de simetría, pero la construcción usual de DFT solo considera estados con  $N - \bar{N} = 0$ . Introduciendo el vector momento  $2D$ -dimensional  $\mathbb{P}^{\mathcal{M}} = (\tilde{p}^{\hat{\mu}}, p_{\hat{\mu}})$ , generado por las derivadas parciales  $-i(\tilde{\partial}^{\hat{\mu}}, \partial_{\hat{\mu}})$  actuando sobre el correspondiente campo, la LMC se lee

$$||\mathbb{P}||^2 \equiv \mathbb{P}^{\mathcal{M}} \mathbb{P}_{\mathcal{M}} = 0 \quad (1.4.17)$$

para  $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$  y  $d$ . En general, este no es suficiente para asegurar consistencia. Por ejemplo, el producto de campos en general no lo satisface y las transformaciones generalizadas (1.4.3) no cumplen clausura.

Esta falla se espera desde cuerdas, ya que muchos otros términos (infinitos) se necesitan para completar la acción, los cuales contienen no solo derivadas de mayor orden sino campos de spin mayores. En la teoría truncada, donde solo los estados no-masivos con  $N = \bar{N} = 1$  son tenidos en cuenta, es necesario imponer mayores restricciones. Una posible, como ya fue

<sup>27</sup>En la formulación original de Siegel [10, 16] la acción contiene términos extra que no estan en (1.4.13). A menos de derivadas totales pueden ser resumidos en [14]

$$\Delta S = \frac{1}{G_{DFT}} \int d^D x d^D \tilde{x} e^{-2d} \left[ \frac{1}{2} (S_{AB} - \eta_{AB}) \eta^{\mathcal{PQ}} \partial_{\mathcal{M}} E^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{P}} \partial^{\mathcal{M}} E^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{Q}} + 4\partial_{\mathcal{M}} d \partial^{\mathcal{M}} d - 4\partial_{\mathcal{M}} \partial^{\mathcal{M}} d \right].$$

En A mostramos que al imponer la LMC estos términos se anulan.

mencionado, es la SC

$$\partial_{\mathcal{M}}\partial^{\mathcal{M}}\dots = 0, \quad (1.4.18)$$

donde los puntos suspensivos indican campos y cualquier producto de ellos. La SC implica que los campos solo dependen de la mitad (del total) de las coordenadas, es decir, la otra mitad debe desecharse. Las coordenadas que sobreviven pueden elegirse iguales a  $x_{\hat{\mu}}$ . Esta elección se llama *marco gravitatorio* ya que en este caso la acción (1.4.13) se reduce a eq. (1.4.1) cuando  $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$  es parametrizada como en (1.4.5) y  $G_{DFT} \equiv 2\kappa^2 \int d^D \tilde{x}$ .

Es importante enfatizar que (1.4.13) describe más grados de libertad físicos que la acción estandard  $D$ -dimensional (1.4.1) para  $g$ ,  $B$  and  $\phi$ . Al introducir  $\tilde{x}_{\hat{\mu}}$ , y sus derivadas parciales  $\tilde{\partial}^{\hat{\mu}}$ , los campos pueden llevar momento en esas direcciones y los background pueden depender también de ellas. Tal dependencia no ocurre solo en DFT: backgrounds con dependencia no trivial en  $\tilde{x}^{\hat{\mu}}$  no pueden ser descriptos desde gravedad  $D$ -dimensional, pero sin embargo se espera que sean soluciones consistentes de la teoría de cuerdas.



# Capítulo 2

## Kaluza-Klein y Windings en DFT

### 2.1. Introducción

La presencia de modos con winding y momento simultáneamente produce la T-dualidad, la cual sin dudas es una característica de las cuerdas. Esta conecta la física de la cuerda definida sobre muy distintos backgrounds geométricos y da lugar a aumentos de simetría para puntos específicos del espacio compacto. La teoría de campos dobles (DFT) intenta incorporar estas características y en particular la información sobre los windings a una teoría de campos. En su construcción debe imponerse una fuerte restricción, la SC. El problema es que la imposición termina eliminando la mitad de las coordenadas, i.e. de forma efectiva desaparece la dependencia de los campos en las coordenadas  $\tilde{x}$ , matando así toda información de los windings. Como la presencia de windigs es esencial para la T-dualidad, tratar con ellos evidentemente requiere relajar la SC. En compactificaciones toroidales, genéricamente, los estados con winding son masivos, por lo tanto, entender su papel significa lidiar con el sector masivo de la cuerda<sup>1</sup>.

En el presente Capítulo comenzaremos con el trabajo realizado en este Tesis<sup>2</sup>, el cual se extenderá por éste y los siguientes Capítulos. El objetivo general de este trabajo es, como ya se ha mencionado, dar una descripción fenomenológica de la teoría de cuerdas en compactificaciones toroidales cubriendo *todo* el espacio de módulos (incluso aquellos puntos para los cuales existe aumento de simetría). Esto culminará en el Capítulo 5 donde daremos una única acción efectiva de bajas energía, que incluye estados con winding, la cual puede interpolar distintos puntos del espacio de módulos, dando lugar así a aumentos/rupturas de simetría. En este Capítulo en particular, estudiaremos un subsector masivo con winding, via compactificaciones de DFT en toros dobles. Como el dilaton y la métrica generalizada de DFT contienen estados de la cuerda bosónica contruidos con un oscilador Left y uno Right, nos concentraremos en este sector del espectro de la cuerda. La idea básica es partir del Lagrangiano usual de DFT, compactificarlo en un toro doble, sin eliminar la dependencia en las coordenadas internas para

---

<sup>1</sup>Sin embargo, en algunos puntos específicos del espacio de módulos, ciertos estados con winding se vuelven no-masivos dando lugar a un aumento de simetría. Trataremos esta situación en los capítulos posteriores

<sup>2</sup>Este Capitulo fue motivo de una publicación bajo el título: *Probing the string winding sector*

luego realizar una expansión en modos. Cada modo estaría, en principio, asociado a un grado de libertad quedando interacciones entre ellos al integrar sobre las coordenadas internas. Luego dichas interacciones deben ser reproducidas por cuerdas, via amplitudes, para mostrar consistencia del desarrollo. El cómo hacer la expansión en modos es fundamental para las conclusiones y es parte de lo que se discutirá más adelante.

Usaremos como guía a la cuerda bosónica, ya que por más que no sea libre de taquiones, los cálculos de amplitudes son más sencillos. Además, para el sector en el que estamos interesados, razonamientos similares a los aquí expuestos pueden realizarse en la cuerda Heterótica.

La comparación entre DFT y cuerdas se hace desarrollando los campos generalizados alrededor de un background toroidal con dilatón constante. Luego desarrollamos la acción de DFT hasta tercer orden en fluctuaciones alrededor del background y comparamos los resultados via amplitudes de tres puntos en cuerdas.

Encontramos que ambos, el espectro de DFT y de cuerdas, contienen momento KK y winding coincidiendo siempre que la LMC se imponga en la expansión en modos de DFT. Más aún, mostraremos que la acción de DFT compactificada es invariante (a tercer orden en fluctuaciones) ante transformaciones generalizadas de gauge generadas por las derivada de Lie generalizada, siempre y cuando la LMC sea impuesta. Esta invariancia nos permite elegir un gauge apropiado, el gauge “armónico generalizado”, el cual puede fácilmente identificarse con las condiciones de polarización sobre estados físicos que se producen en cuerdas via la cancelación de la anomalía conforme de los vértices en el OPE con el tensor de energía-impulso de la hojamundo.

## 2.2. Coordenadas Armónicas

Trabajaremos en el entorno de DFT usual, pero utilizaremos una redefinición de la métrica generalizada  $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$ , la cual se conoce como marco de Einstein. En éste se combinan el dilatón  $d$  y la métrica  $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$  generalizados en una única métrica  $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}}$ . La razón para hacerlo es porque en este marco la acción de DFT adquiere una forma más simple para comparar al final los resultados con cuerdas.

Para llegar al marco de Einstein, realizamos una transformación de Weyl

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}} = e^{2\Omega} \mathcal{H}_{\mathcal{MN}}, \quad (2.2.1)$$

bajo la cual un tensor de peso conforme  $\Delta_\Phi$  transforma así

$$\tilde{\Phi} = e^{-\Omega \Delta_\Phi} \Phi. \quad (2.2.2)$$

La lista de pesos conformes en DFT figura en la siguiente tabla 2.1. Luego haciendo uso de

$\Phi$	$\mathcal{H}_{\mathcal{KL}}$	$\eta_{\mathcal{KL}}$	$E^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}}$	$S_{\mathcal{AB}}$	$\eta_{\mathcal{AB}}$
$\Delta_{\Phi}$	-2	-2	-1	0	0

**Tabla 2.1:** Pesos Conformes en DFT.

esto, se ve que

$$\mathcal{R} = e^{2\Omega} \left[ \tilde{\mathcal{R}} - 2\partial_{\mathcal{M}}\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{N}}\Omega - 2\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}\partial_{\mathcal{N}}\Omega - (2+D)\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}\Omega\partial_{\mathcal{N}}\Omega \right. \\ \left. + 8\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}\Omega\partial_{\mathcal{N}}d - \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{KL}}\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{KL}}\partial_{\mathcal{N}}\Omega \right]. \quad (2.2.3)$$

Finalmente, eligiendo  $\Omega = d$  e integrando por partes, la acción 1.4.13 puede expresarse en el marco de Einstein

$$S = \frac{1}{G_{DFT}} \int d^D x d^D \tilde{x} \hat{\mathcal{R}}(\tilde{\mathcal{H}}, d), \quad (2.2.4)$$

donde

$$\hat{\mathcal{R}}(\tilde{\mathcal{H}}, d) = (2-D)\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}d\partial_{\mathcal{N}}d - \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{KL}}\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{KL}}\partial_{\mathcal{N}}d + \partial_{\mathcal{M}}\partial_{\mathcal{N}}\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} \\ + \frac{1}{8}\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{KL}}\partial_{\mathcal{N}}\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{KL}} - \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{KL}}\partial_{\mathcal{K}}\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{NL}}. \quad (2.2.5)$$

Esta acción 2.2.4 se comporta similar a la acción de Einstein-Hilbert de gravedad usual en varios aspectos. Al utilizar los difeomorfismos generalizados de DFT<sup>3</sup> podemos fijar un gauge, conocido como gauge de coordenadas armónicas, dejando así la ecuación de movimiento mucho más simplificada. Específicamente, este gauge se consigue al pedir que las coordenadas dobles  $\mathbb{X}^{\mathcal{R}}$  sean solución del Laplaciano:

$$\partial_{\mathcal{M}}\left(\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{N}}\right)\mathbb{X}^{\mathcal{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\mathcal{M}}\tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} = 0, \quad (2.2.6)$$

el cual, en término de los antiguos campos  $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$  y  $d$ , da

$$\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{H}^{\mathcal{MN}} - 2\mathcal{H}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}d = 0, \quad (2.2.7)$$

También podríamos escribirlo como

$$\partial_{\mathcal{M}}d = \frac{1}{2}\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{R}}\mathcal{H}^{\mathcal{NR}} = -\frac{1}{2}\mathcal{H}^{\mathcal{NR}}\partial_{\mathcal{R}}\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}. \quad (2.2.8)$$

Haciendo uso de las condiciones anteriores e integrando por partes, la acción (1.4.13) puede expresarse, de forma particularmente compacta, en el gauge de las coordenadas armónicas,

$$S = \frac{1}{G_{DFT}} \int d^D x d^D \tilde{x} e^{-2d} \left[ \frac{1}{8}\mathcal{H}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{H}^{\mathcal{KL}}\partial_{\mathcal{N}}\mathcal{H}_{\mathcal{KL}} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{H}^{\mathcal{KL}}\partial_{\mathcal{K}}\mathcal{H}_{\mathcal{NL}} \right], \quad (2.2.9)$$

<sup>3</sup>Por ahora supongamos que podemos utilizarlos, más adelante probaremos que incluso al relajar la SC al LMC cuando compactifiquemos, los difeomorfismos seguirán siendo una simetría hasta tercer orden en fluctuaciones de los campos.

o, en el marco de Einstein, como

$$S_{DFT} = \frac{1}{G_{DFT}} \int d^D x d^D \tilde{x} \left( \frac{1}{8} \tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} \tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{KL}} - \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} \tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{K}} \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{LN}} \right. \\ \left. + (2 - D) \tilde{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} d \partial_{\mathcal{N}} d \right). \quad (2.2.10)$$

## 2.3. Perturbaciones en DFT

Hemos dicho que estudiaremos compactificaciones toroidales de DFT y para ellos trabajaremos con la acción 2.2.10. Para contrastar cualquier resultado con cuerdas es necesario expandir los campos alrededor de un background, ya que las amplitudes de scattering entre vértices se traducen en las equivalentes para fluctuaciones. Por lo tanto, expandiremos a la métrica generalizada  $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$  alrededor de un background  $\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}}$  y con fluctuaciones  $\hat{h}_{\mathcal{MN}}$  (idem con el dilatón  $d$ ),

$$\mathcal{H}_{\mathcal{MN}} = \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}} + \hat{h}_{\mathcal{MN}}, \quad d = \bar{d} + \hat{d}. \quad (2.3.1)$$

Consideraremos compactificaciones toroidales, por lo tanto serán  $\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}}$  y  $\bar{d}$  constantes<sup>4</sup>. Como la teoría presenta dos métricas,  $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$  y  $\eta_{\mathcal{MN}}$ , los índices de (2.3.1) pueden en principio ser invertidos de dos maneras: usando la  $\eta^{\mathcal{MN}}$  o usando el desarrollo geométrico en serie para matrices. Por lo tanto, obtenemos

$$\mathcal{H}^{\mathcal{MN}} = \bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} + \hat{h}^{\mathcal{MN}} = \bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} - \hat{h}^{\mathcal{MN}} + \hat{h}^{\mathcal{MP}} \hat{h}^{\mathcal{P}\mathcal{N}} - \hat{h}^{\mathcal{MP}} \hat{h}^{\mathcal{Q}\mathcal{P}} \hat{h}^{\mathcal{Q}\mathcal{N}} + \dots, \quad (2.3.2)$$

donde, para abreviar, introducimos la notación  $A^{\mathcal{M}} \equiv \bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} A_{\mathcal{N}}$ ,  $A_{\mathcal{M}} \equiv \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}} A^{\mathcal{N}}$ , y donde además, resultara útil notar que a primer orden

$$\hat{h}^{\mathcal{MN}} = \eta^{\mathcal{MP}} \eta^{\mathcal{NQ}} \hat{h}_{\mathcal{QP}} = -\bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{MP}} \bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{NQ}} \hat{h}_{\mathcal{QP}} = -\hat{h}^{\mathcal{MN}}. \quad (2.3.3)$$

El campo  $\hat{h}^{\mathcal{MN}}$  contiene infinitas potencias de  $\hat{h}_{\mathcal{PQ}}$  y el background  $\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}}$ <sup>5</sup>.

Notar también que por construcción  $\bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{NQ}} = \delta^{\mathcal{M}}_{\mathcal{Q}}$ , sin embargo  $\hat{h}^{\mathcal{MN}} \hat{h}_{\mathcal{NQ}} \neq \delta^{\mathcal{M}}_{\mathcal{Q}}$ . Más bien, lo que se obtiene es

$$\hat{h}^{\mathcal{MN}} \hat{h}_{\mathcal{NQ}} = - \left( \hat{h}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{Q}} + \hat{h}^{\mathcal{M}}_{\mathcal{Q}} \right). \quad (2.3.4)$$

Como la comparación con cuerdas la haremos en el marco de Einstein, resulta útil además notar que

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}} = \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}} + \hat{h}_{\mathcal{MN}} = \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}} + (\hat{h}_{\mathcal{MN}} + 2\hat{d}\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}}). \quad (2.3.5)$$

En lo que sigue veremos como se desarrolla en fluctuaciones la acción de DFT para luego realizar la compactificación y desarrollo en KK.

<sup>4</sup>Tanto para la parte interna como para la externa.

<sup>5</sup>En este trabajo nos quedamos a tercer órdenes en fluctuaciones, por lo tanto la serie puede ser truncada.



### 2.3.1. Expansión en Fluctuaciones de DFT

Usando (2.3.5) expandimos la acción de DFT en el gauge armónico y obtenemos, hasta tercer orden en fluctuaciones,

$$\begin{aligned} L_{DFT} = & \frac{1}{8} \bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} \hat{h}^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} \hat{h}_{\mathcal{KL}} - (D-2) \bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} \hat{d} \partial_{\mathcal{N}} \hat{d} \\ & - \frac{1}{2} \hat{h}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} \hat{h}^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{K}} \hat{h}_{\mathcal{NL}} + \frac{1}{8} \hat{h}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} \hat{h}^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} \hat{h}_{\mathcal{KL}} - (D-2) \hat{h}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} \hat{d} \partial_{\mathcal{N}} \hat{d}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Vale recordar que en términos de los campos (gravitones, Kalb-Ramond, etc), las fluctuaciones  $\hat{h}_{\mathcal{MN}} = \hat{h}_{(1)\mathcal{MN}} + \hat{h}_{(2)\mathcal{MN}} + \dots$  contienen contribuciones de diferentes órdenes en los campos. Por ejemplo, el término cuadrático en  $\hat{h}_{\mathcal{MN}}$  podría dar lugar a términos de orden cúbico en los campos de la forma  $\frac{1}{4} \bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} \hat{h}_{(2)}^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} \hat{h}_{(1)\mathcal{KL}}$ , al mezclarse con uno de primer orden. Sin embargo, esto no sucede, y para verlo podemos integrar por partes este término y obtendríamos la ecuación de movimiento (ver (2.4.9) abajo), y por lo tanto tal se anula en capa de masa.<sup>6</sup> Las mismas conclusiones valen para el segundo término. Por lo tanto, los términos de tercer orden en los campos involucran solo fluctuaciones de primer orden de los campos generalizados, y finalmente se obtiene el Lagrangiano (2.3.6) con  $\hat{h}_{\mathcal{KL}} = \hat{h}_{(1)\mathcal{KL}}$

Antes de compactificar, solo para ganar intuición sobre los objetos con los que estamos tratando, podemos mirar que ocurre para el background plano

$$\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}} = \begin{pmatrix} \eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} & 0 \\ 0 & \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \end{pmatrix}, \quad (2.3.7)$$

obtendríamos, a primer orden en las fluctuaciones,  $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + h_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ,  $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = b_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ,

$$\hat{h}_{\mathcal{MN}} = \begin{pmatrix} \hat{h}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} & \hat{h}^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}} \\ \hat{h}_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}} & \hat{h}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^{\hat{\mu}\hat{\nu}} & -\eta^{\hat{\mu}\hat{\rho}} b_{\hat{\rho}\hat{\nu}} \\ -\eta^{\hat{\nu}\hat{\rho}} b_{\hat{\rho}\hat{\mu}} & h_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \end{pmatrix}. \quad (2.3.8)$$

Luego, de los términos de segundo orden en fluctuaciones e imponiendo la SC (en el marco de Einstein, es decir eliminando la dependencia en las coordenadas  $\tilde{x}$ ), se obtienen los términos cuadráticos en la acción (2.4.9) en el gauge de Donder [18]. De hecho, en el marco de cuerdas obtenemos

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x e^{-2\bar{\phi}} \left[ \partial_{\hat{\sigma}} \left( \frac{h_{\hat{\nu}}^{\hat{\nu}}}{2} - 2\hat{\phi} \right) \partial^{\hat{\sigma}} \left( \frac{h_{\hat{\rho}}^{\hat{\rho}}}{2} - 2\hat{\phi} \right) - \frac{1}{2} \partial_{\hat{\sigma}} (h_{\hat{\nu}\hat{\lambda}} + b_{\hat{\nu}\hat{\lambda}}) \partial^{\hat{\sigma}} (h^{\hat{\nu}\hat{\lambda}} + b^{\hat{\nu}\hat{\lambda}}) \right]. \quad (2.3.9)$$

<sup>6</sup>Que al fin y al cabo es lo que interesa, ya que los calculos de amplitudes de scattering se hacen en capa de masa.

Transformando la acción al espacio de momentos, obtenemos los propagadores para  $h$ ,  $b$  y  $\hat{\phi}$

$$\begin{aligned} D_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}}^h &= \frac{e^{-2\bar{\phi}}}{4} \frac{\eta_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}}{p^2}, \\ D_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\rho}\hat{\sigma}}^b &= \frac{e^{-2\bar{\phi}}}{4} \frac{\eta_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} - \eta_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}\eta_{\hat{\nu}\hat{\rho}}}{p^2}, \\ D^{2\hat{\phi}-\frac{h\hat{\nu}}{2}} &= \frac{4e^{-2\bar{\phi}}}{p^2}. \end{aligned}$$

La moraleja es que para obtener teorías de gravedad ordinarias la SC se debe imponer, como es de esperar.

### 2.3.2. Compactificación Generalizada en Kaluza-Klein

La idea ahora es seguir avanzando para realizar la compactificación en un toro doble. En las direcciones espacio-tiempo impondremos la SC pues no hay necesidad física para evitarlo. Será necesario plantear un ansatz de Kaluza-Klein. Pero esto no será todo, tenemos que expandir luego en Fourier, y ese punto es sutil. Surge la pregunta: ¿Cómo expandir?, es decir, ¿con qué valores de momento y winding?. Claramente si permitimos todo tendríamos estados que no existen en cuerdas, ya que la LMC impone vínculos entre el momento KK y el winding de cada estado.

Empecemos por lo primero: dar el ansatz para descomponer la métrica generalizada  $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$ . Lo llamaremos descomposición en Kaluza-Klein generalizada, y esta se lee

$$\mathcal{H}_{\mathcal{MN}} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\rho}c_{\rho\nu} & -g^{\mu\rho}A_{N\rho} \\ -g^{\nu\rho}c_{\rho\mu} & g_{\mu\nu} + A^N_{\mu}\mathcal{M}_{NP}A^P_{\nu} + c_{\rho\mu}g^{\rho\sigma}c_{\sigma\nu} & \mathcal{M}_{NP}A^P_{\mu} + A_{N\rho}g^{\rho\sigma}c_{\sigma\mu} \\ -g^{\nu\rho}A_{M\rho} & \mathcal{M}_{MP}A^P_{\nu} + A_{M\rho}g^{\rho\sigma}c_{\sigma\nu} & \mathcal{M}_{MN} + A_{M\rho}g^{\rho\sigma}A_{N\sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.3.10)$$

donde hemos expandido los índices  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  en espacio-tiempo  $\mu, \nu, \dots$  que barren de  $0, \dots, d-1$ , y en índices del toro internos (dobles)  $M, N, \dots = 1, \dots, 2(D-d)$ . La combinación  $c_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{2}A^N_{\mu}A_{N\nu}$  fue introducida, donde  $A^N_{\mu}$  son los vectores y los llamaremos *del tipo Cartan*. La  $\mathcal{M}_{MN}$  es la matriz de escalares definida más abajo.

Como estamos compactificando a un toro doble, el background de la métrica generalizada queda

$$\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}} = \begin{pmatrix} \eta^{\mu\nu} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathcal{M}}_{MN} \end{pmatrix}, \quad (2.3.11)$$

donde

$$\bar{\mathcal{M}}_{MN} = \begin{pmatrix} G^{mn} & -G^{mp}B_{pn} \\ B_{mp}G^{pn} & G_{mn} - B_{mp}G^{pq}B_{qn} \end{pmatrix}, \quad (2.3.12)$$

y los índices  $m, n, \dots = 1, \dots, D-d$ .

Con todo esto presente, las fluctuaciones de la métrica generalizada quedan, a primer

orden,

$$\hat{h}_{(1)\mathcal{MN}} = \begin{pmatrix} \hat{h}_{(1)}^{\mu\nu} & \hat{h}_{(1)\nu}^\mu & \hat{h}_{(1)N}^\mu \\ \hat{h}_{(1)\mu}^\nu & \hat{h}_{(1)\mu\nu} & \hat{h}_{(1)\mu N} \\ \hat{h}_{(1)M}^\nu & \hat{h}_{(1)M\nu} & \hat{h}_{(1)MN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^{\mu\nu} & -\eta^{\mu\rho} b_{\rho\nu} & -\eta^{\mu\rho} A_{N\rho} \\ -\eta^{\nu\rho} b_{\rho\mu} & h_{\mu\nu} & \overline{\mathcal{M}}_{NP} A^P_\mu \\ -\eta^{\nu\rho} A_{M\rho} & \overline{\mathcal{M}}_{MP} A^P_\nu & h_{MN} \end{pmatrix}. \quad (2.3.13)$$

La matriz  $h_{MN}$  que codifica las fluctuaciones escalares es

$$h_{MN} = \begin{pmatrix} -G^{mk} h_{kl} G^{lm} & -G^{mk} b_{km} + G^{mk} h_{ks} G^{sl} B_{lm} \\ -B_{ns} G^{sl} h_{lk} G^{km} + b_{nl} G^{lm} & h_{nm} - b_{nl} G^{lk} B_{km} + B_{nk} G^{ks} h_{sr} G^{rb} B_{bm} - B_{nk} G^{kl} b_{lm} \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

donde  $h_{nl}, b_{nl}$  son los escalares derivados del gravitón y del Kalb-Ramond en dimensión más alta, respectivamente.

De la definición del dilatón generalizado (1.4.15) y expandiendo  $d = \bar{d} + \hat{d}$ , tenemos que

$$e^{-2\bar{d}} = e^{-2\phi_0} \sqrt{\det G}, \quad (2.3.15)$$

$$\hat{d} = \hat{\phi} - \frac{1}{4} h^\mu{}_\mu. \quad (2.3.16)$$

En el marco de Einstein, las fluctuaciones se modifican, pero solo las siguientes

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{h}}_{\mu\nu} &= (h_{\mu\nu} + 2\hat{d}\eta_{\mu\nu}) \equiv \tilde{h}_{\mu\nu}, \\ \hat{\tilde{h}}^{\mu\nu} &= (-h^{\mu\nu} + 2\hat{d}\eta^{\mu\nu}) \equiv -\tilde{h}^{\mu\nu}, \\ \hat{\tilde{h}}_{MN} &= (h_{MN} + 2\hat{d}\overline{\mathcal{M}}_{MN}) \equiv \tilde{h}_{MN}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

La condición de gauge armónico en el marco de Einstein ( $\partial^\mathcal{M} \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{MN}} = 0$ ) se traduce en fluctuaciones de la siguiente manera

$$\partial^\mathcal{M} \hat{\tilde{h}}_{\mathcal{MN}} = \partial_\mu \hat{\tilde{h}}^\mu{}_\mathcal{N} + \partial^L \hat{\tilde{h}}_{LN} = 0, \quad (2.3.18)$$

donde hemos usado la SC en las direcciones espacio-tiempo. Por lo tanto, cuando se especifican los índices  $\mathcal{N}$ , se obtiene

$$\partial_\mu \hat{\tilde{h}}^{\mu\nu} + \partial_N \hat{\tilde{h}}^{N\nu} = 0 \rightarrow \partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu} + \partial_N A^{N\nu} = 0, \quad (2.3.19)$$

$$\partial_\mu \hat{\tilde{h}}^\mu{}_\nu + \partial_N \hat{\tilde{h}}^N{}_\nu = 0 \rightarrow \partial^\mu b_{\mu\nu} - \overline{\mathcal{M}}_{MN} \partial^N A^M_\nu = 0, \quad (2.3.20)$$

$$\partial_\mu \hat{\tilde{h}}^{\mu N} + \partial_M \hat{\tilde{h}}^{MN} = 0 \rightarrow \partial^\mu A^N_\mu - \overline{\mathcal{M}}^{SP} \partial_S \tilde{h}_{PM} \overline{\mathcal{M}}^{MN} = 0. \quad (2.3.21)$$

Discutiremos la relación entre esto y la anulación de la anomalía conforme en teoría de cuerdas en la sección (2.5).

## 2.4. Expansión en Modos

Ahora nos enfocaremos en hacer el desarrollo en modo, el cual como se viene mencionando tiene sus sutilezas. La compactificación fue hecha sobre un toro doble  $2n$ -dimensional quedan-

dose con  $2(D - d) = 2n$  círculos, los cuales no son en general ortogonales pues la métrica del background interno no es diagonal<sup>7</sup>.

Las coordenadas internas  $\mathbb{Y}^M = (\tilde{y}_m, y^m)$  tienen periodicidad

$$\tilde{y}_m \sim \tilde{y}_m + 2\pi\tilde{R}_{(m)}, \quad y^m \sim y^m + 2\pi R^{(m)}, \quad (2.4.1)$$

donde  $R^{(m)}$  y  $\tilde{R}_{(m)} = \alpha' R^{(m)-1}$  es el radio del  $m$ -ésimo ciclo y su dual, respectivamente. Los momentos internos se pueden codificar en vectores  $O(n, n)$  denotados por  $\mathbb{P}_M$  con componentes

$$\mathbb{P}_M \equiv (\mathbb{P}_m, \mathbb{P}_{n+m}) = (p_m, \tilde{p}^m) = \left( \frac{n_m}{R^{(m)}}, \frac{w^m}{\tilde{R}_{(m)}} \right), \quad (2.4.2)$$

siendo  $n_m$  y  $w^m$  los números enteros de momento y winding.

En los background de toros, las identificaciones (2.4.1) solo son preservadas por transformaciones de  $O(n, n)$  con enteros en la entrada en la matriz de transformación. Por lo tanto, el grupo de simetría  $O(n, n, \mathbb{R})$  de DFT se rompe al grupo discreto  $O(n, n, \mathbb{Z})$ .

La pregunta ahora es ¿cómo realizar la expansión? Si permitimos cualquier valor para los enteros  $n_m$  y  $w^m$ , entonces estaríamos permitiendo la existencia de grados de libertad que no existen en cuerda ya que la LMC los prohíbe. Una manera de pensar como proceder es notando que DFT fue construída de tal manera que incorpora *solo* a los estados con un determinado número de osciladores. Al compactificar en cuerdas, esos estados dan lugar a modos donde los osciladores en sus vértices se mantienen. Por ejemplo, el vértice de los gravitones, masivos y no masivos, es

$$\epsilon_{\mu\nu}^{\mathbb{P}} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ik \cdot X} e^{i\mathbb{P} \cdot \mathbb{Y}} \quad (2.4.3)$$

donde  $\mathbb{Y}$  el vector de coordenadas internas dobles y  $k$  el momento externo. Todos tienen el mismo número de osciladores, lo único que cambia es el factor  $e^{i\mathbb{P} \cdot \mathbb{Y}}$  que dota de momento interno al vértice. Lo mismo ocurre con el Kalb-Ramond y el resto de los estados (vectores y escalares) que aparecen al compactificar desde  $D = 10$  (en la bosónica  $D = 26$ ). De hecho, todos los estados con los que estamos lidiando tienen los mismos valores posibles de  $\mathbb{P}$  al tener todo la misma LMC.

En DFT, la métrica generalizada (y el dilatón) contiene los grados de libertad de la métrica y el Kalb-Ramond en  $D = 10$ . Con esto y lo anterior en mente, podemos intuir que al desarrollar la métrica generalizada (y el dilatón) en momentos KK debemos hacerlo *solo* usando aquellos valores de  $\mathbb{P}$  que existen en cuerdas. Es decir, respetando la LMC.

En definitiva, proponemos expandir de la siguiente manera:  $\mathcal{H}(x, \mathbb{Y}) = \bar{\mathcal{H}} + \hat{h}(x, \mathbb{Y})$  con

$$\hat{h}(x, \mathbb{Y}) = \sum_{\mathbb{P}} {}'\hat{h}^{(\mathbb{P})}(x) e^{i\mathbb{P}_M \mathbb{Y}^M}, \quad (2.4.4)$$

<sup>7</sup>Consideramos aquí el caso en el que la métrica no tiene unidades, y las coordenadas sí. Podríamos alternativamente absorber las coordenadas en la métrica redefiniendo para absorber así los radios  $\bar{G}_{mn} \rightarrow \bar{G}_{mn} R^{(m)} R^{(n)}$ .

donde la dependencia en  $\tilde{x}_\mu$  es eliminada por la SC en el espacio-tiempo. Por lo tanto resulta

$$g_{\mu\nu}(x, \mathbb{Y}) = \eta_{\mu\nu} + \sum_{\mathbb{P}} 'h_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}(x) e^{i\mathbb{P}_M \mathbb{Y}^M}, \quad (2.4.5)$$

$$b_{\mu\nu}(x, \mathbb{Y}) = \sum_{\mathbb{P}} 'b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}(x) e^{i\mathbb{P}_M \mathbb{Y}^M}, \quad (2.4.6)$$

y similar para  $\hat{d}(x, \mathbb{Y})$ , vectores de gauge, escalares.

En la sumatoria sobre  $\mathbb{P}$ , aparece una prima que indica que solo los valores compatibles con la LMC deben permitirse. Específicamente, solo valores que cumplan  $\mathbb{P}^2 = 0$  están permitidos<sup>8</sup>. Además como los campos son reales debe ocurrir que  $\mathcal{H}^{(-\mathbb{P})}(x) = \mathcal{H}^{(\mathbb{P})}(x)^*$ .

Vale recordar que al imponer la SC nos queda un factor  $\frac{1}{2\kappa^2}$  en la acción, donde  $\kappa$  es la constante de gravitación en  $d + 2n$  dimensiones. En términos de los acoplamientos de DFT de arriba sería  $\frac{1}{2\kappa^2} = \frac{1}{G_{DFT}} \int d^d \tilde{x}$ .

Por otro lado, como estamos compactificando tanto un círculo como su dual, la dependencia en  $R$  en el factor de volumen de la reducción dimensional no está presente, y en cambio solo queda un factor en  $\alpha'$  pues

$$d^{2n} \mathbb{Y} = \prod_{i=1}^n \frac{dy^i}{2\pi R_i} \frac{d\tilde{y}_i}{2\pi \tilde{R}_i} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} dy^i d\tilde{y}_i. \quad (2.4.7)$$

Siguiendo con las convenciones usuales, tomamos

$$\int d^{2n} \mathbb{Y} e^{i(\mathbb{P}_M + \mathbb{Q}_M) \mathbb{Y}^M} = \delta^{2n}(\mathbb{P}_M + \mathbb{Q}_M), \quad (2.4.8)$$

ya que  $\int_0^{2\pi R_i} \frac{dy_i}{2\pi R_i} = 1$ . La dependencia de la acción con los radios aparecerá después cuando mostremos que los vectores tipo Cartan dan lugar a acoplamientos  $U(1)$  en los que los radios son las cargas Abelianas asociadas. Finalmente un factor de escala aparece via el valor de expectación del dilatón generalizado  $e^{-2\tilde{d}}$ , que contiene tanto al de la métrica como al del dilatón  $\bar{\phi}$ .

Para finalizar, una definición más: A esta expansión en modos, donde respetamos la LMC al expandir cada campo la llamaremos Kaluza-Klein generalizada (GKK). Análogamente, a los modos de Fourier los denotaremos también con GKK.

### 2.4.1. Términos cuadráticos, Masas y Difeomorfismos Generalizados

Empecemos analizando las consecuencias de la compactificación y la expansión en modos GKK al insertar toda esta información en (2.3.6). Nos concentraremos en mirar primero los términos cuadráticos de la acción. Al insertar la expansión GKK en la primera línea del

---

<sup>8</sup>Recordar que los estados involucrados tienen dos osciladores, por lo tanto la LMC para ellos resulta  $\mathbb{P}^2 = 0$

Lagrangiano (2.3.6), se obtiene

$$S_{DFT}^{(2)} = \frac{1}{2\kappa_d^2} \sum_{\mathbb{P}}' \int d^d x \left[ \hat{d}(x)^{(\mathbb{P})} (\partial_\mu \partial^\mu - \mathbb{P}_M \overline{\mathcal{M}}^{MN} \mathbb{P}_N) \hat{d}(x)^{(-\mathbb{P})} - \frac{1}{8} \hat{h}^{(\mathbb{P})\mathcal{KL}}(x) (\partial_\mu \partial^\mu - \mathbb{P}_M \overline{\mathcal{M}}^{MN} \mathbb{P}_N) \hat{h}_{\mathcal{KL}}^{(-\mathbb{P})}(x) \right], \quad (2.4.9)$$

donde redefinimos  $\hat{d} \rightarrow (D-2)^{1/2} \hat{d}$ , y usando (2.3.15),

$$\frac{1}{2\kappa_d^2} = \frac{1}{2\kappa^2} e^{-2\bar{d}}. \quad (2.4.10)$$

La ecuación de movimiento se lee

$$(\partial_\mu \partial^\mu - \mathbb{P}_M \overline{\mathcal{M}}^{MN} \mathbb{P}_N) \hat{h}_{\mathcal{KL}}^{(\mathbb{P})}(x) = 0, \quad (\partial_\mu \partial^\mu - \mathbb{P}_M \overline{\mathcal{M}}^{MN} \mathbb{P}_N) \hat{d}^{(\mathbb{P})}(x) = 0. \quad (2.4.11)$$

Estas expresiones no solo dan lugar a los propagadores del multiplete gravitatorio<sup>9</sup> sino que además contienen los propagadores de los modos GKK. En particular, podemos de aquí leer la masa de los  $\mathbb{P}$  modos GKK<sup>10</sup> obteniendo

$$M^2 = -k^2 = \mathbb{P}_M \overline{\mathcal{M}}^{MN} \mathbb{P}_N = \mathbb{P}^M \mathbb{P}_M. \quad (2.4.12)$$

Esta es exactamente la masa (cuadrada) de los estados de la cuerda en un background toroidal cuando  $N + \bar{N} - 2 = 0$ . Claramente esperábamos esta condición ya que empezamos con estados con  $N = \bar{N} = 1$ . Sin embargo, los estados de la cuerda satisfacen la LMC,

$$\frac{1}{2} \mathbb{P}_M \mathbb{P}^M = N - \bar{N} = 0, \quad (2.4.13)$$

pero esto está garantizado por nuestra restricción impuesta en el desarrollo en modos en la cual solo los modos que satisfacen la LMC aparecen en la sumatoria, i.e.

$$\hat{h}(x, \mathbb{Y}) = \sum_{\mathbb{P}} \hat{h}^{(\mathbb{P})}(x) e^{i\mathbb{P}_M \mathbb{Y}^M} \delta(\mathbb{P}^2, 0), \quad (2.4.14)$$

y similar para  $\hat{d}(x, \mathbb{Y})$ .

**Difeomorfismos Generalizados:** Discutamos brevemente las propiedades de transformación de la acción compactificada ante difeomorfismos generalizados (1.4.3). Sabemos que la variación debería ser proporcional a términos que se anulan si la SC  $\partial_P \otimes \partial^P = 0$  se impone. Como la parte espacio-temporal ya satisface este vínculo, la transformación debe ser proporcional a  $\partial_P \otimes \partial^P = 0$ , donde ahora  $P$  recorre las coordenadas internas.

Al ser la variación proporcional al parámetro de gauge puede escribirse como  $\partial_P \xi_M J^{PM}$ , donde  $J^{PM}$  esta formado términos que son producto de la métrica y/o dilatón generalizados

<sup>9</sup>En la próxima sección detallaremos más los grados de libertad físicos de la teoría.

<sup>10</sup>Aquí el punto se refiere a la contracción via la métrica interna  $\overline{\mathcal{M}}$ .

con una única derivada  $\partial^P$  actuando en alguno de ellos. De la expansión en modos GKK, estas derivadas dan lugar a factores  $\mathbb{Q}_P^i \mathbb{Q}^{jP}$  con además un factor  $\delta^{2n}(\sum_i \mathbb{Q}^i)$  producido por la conservación de momento al integrar.

Si nos quedamos a tercer orden en fluctuaciones, como de hecho hacemos, la conservación de momento y la LMC ( $\mathbb{Q}^i{}^2 = 0$ ) para cada campo imponen (incluyendo a  $\xi_M$ ) encontramos que  $\mathbb{Q}^i \cdot \mathbb{Q}^j = 0$ . Por lo tanto, concluimos que la acción, a este orden, es *invariante* ante difeomorfismos generalizados.

Por lo tanto, tenemos una formulación de DFT que involucra windings y los difeomorfismos generalizados. Podemos ahora estudiar que consecuencias trae esto sobre las interacciones y sobre el contenido físico de la teoría.

### 2.4.2. Los Grados de Libertad Físicos

Al tener difeomorfismos generalizados, los cuales son en particular una simetría de gauge, el contenido de grados de libertad del Lagrangiano se reduce al poder fijar un gauge.

La fórmula de masa (2.4.12) no permite visualizar los estados físicos al ser esta genérica. Al mirar rápidamente podríamos pensar que  $\hat{h}_M^{(\mathbb{P})\mu}(x)$  denota  $2(D-d)$  vectores masivos. Sin embargo, alguno de estos vectores debe ser absorbido por los GKK modos de los gravitones y Kalb-Ramond para convertirse en masivos<sup>11</sup>. Es, de hecho, la condición de gauge armónico la que nos permite identificar los grados de libertad físicos. Para demostrar esto primero vale la pena recordar los campos físicos en dimensiones bajas.

Un tensor simétrico en  $D$  dimensiones tiene  $(D-2)(D-1)/2$  grados de libertad<sup>12</sup>. Cuando hay  $n$  dimensiones compactas, puede escribirse

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(D-2)(D-1) &= \frac{1}{2}(D-n-2)(D-n-1) + n(D-n-2) + \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{or} \\ \frac{1}{2}(D-2)(D-1) &= \frac{1}{2}(D-n-1)(D-n) + (n-1)(D-n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

Partiendo de la métrica en  $D$  dimensiones, al descomponer los índices en  $D-n$  espacio-tiempo y  $n$  índices internos, tendríamos para los estados no-masivos (correspondientes a los modos cero de la expansión en modos GKK):  $\frac{1}{2}(D-n-2)(D-n-1)$  g.d.l. para  $g_{\mu\nu}$ ,  $n$  vectores  $g_{\mu m}$  que dan lugar a  $n(D-n-2)$  g.d.l. y  $\frac{1}{2}n(n+1)$  escalares  $g_{mn}$ , todo consistente con la primera ecuación.

Por otro lado, si los estados son masivos, debemos descomponerlos como en la segunda ecuación, la cual se corresponde con un 2-tensor simétrico masivo,  $n-1$  vectores masivos y  $\frac{1}{2}n(n-1)$  escalares. Podemos entender esta combinación al pensar que un escalar es “comido” por un vector no-masivo para transformarse en masivo dejando  $\frac{1}{2}n(n+1) - n = \frac{1}{2}n(n-1)$  escalares and  $n$  vectores masivos con  $(D-n-1)$  g.d.l. Luego, uno de esos vectores es comido

<sup>11</sup>En una teoría de Kaluza-Klein usual ocurre lo mismo. Los modos masivos de los gravitones (y del Kalb-Ramond) necesitan absorber grados de libertad (g.d.l) para tener todas las polarizaciones físicas que un tensor de su spin tiene.

<sup>12</sup>Estamos contando el grado de libertad de la traza asociado al dilatón. Más adelante discutiremos la separación entre la traza y el resto cuando comparemos con cuerdas.

por el gravitón para volverse masivo, dejando un 2-tensor masivo con  $\frac{1}{2}(D-n-2)(D-n-1) + (D-n-1) = \frac{1}{2}(D-n-1)(D-n)$  g.d.l., y  $n-1$  vectores masivos.

Una cuenta similar puede aplicarse al caso del tensor antisimétrico. Un 2-tensor antisimétrico no-masivo con  $\frac{1}{2}(D-2)(D-3)$  g.d.l. puede descomponerse como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(D-2)(D-3) &= \frac{1}{2}(D-n-2)(D-n-3) + n(D-n-2) + \frac{1}{2}n(n-1) \\ \frac{1}{2}(D-2)(D-3) &= \frac{1}{2}(D-n-1)(D-n-2) + (n-1)(D-n-1) + \frac{1}{2}(n-2)(n-1). \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

La primera ecuación da lugar a la descomposición familiar de KK en términos de un tensor no-masivo  $b_{\mu\nu}$ ,  $n$  vectores no masivos  $b_{\mu m}$  y  $\frac{1}{2}n(n-1)$  escalares no-masivos  $b_{mn}$ . Para el caso masivos, un tensor antisimétrico no-masivo se come a un vector no-masivo, dejando un tensor antisimétrico masivo con  $\frac{1}{2}(D-n-2)(D-n-3) + (D-n-2) = \frac{1}{2}(D-n-1)(D-n-2)$  g.d.l. Los  $n-1$  vectores no-masivos restantes comen  $n-1$  escalares para transformarse en  $n-1$  vectores masivos, dejando  $\frac{1}{2}n(n-1) - (n-1) = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)$  escalares masivos.

En nuestro caso de DFT, un determinado nivel masivo está caracterizado por el momento generalizado  $\mathbb{P}$ , con LMC  $\mathbb{P}^2 = 0$ , y tal nivel contiene un tensor de spin 2 simétrico (que puede ser descompuesto en parte con y sin traza), un tensor antisimétrico,  $2(n-1)$  vectores y  $n(n-1)$  escalares; todos con masa  $M^2 = \mathbb{P}\overline{\mathcal{M}}\mathbb{P}$ . Notar que en el caso del círculo doble,  $n=1$ , y ningún vector o escalar masivo están presentes, solo gravitones y antisimétricos masivos.

En el espacio de momentos (tanto interno como externo), la condición de gauge armónico generalizado (2.3.21) para los modos  $\hat{h}_{\mathcal{MN}}^{(\mathbb{P})}(k)$  se lee

$$k^\mu \hat{h}_{\mu\mathcal{N}}^{(\mathbb{P})}(k) + (\mathbb{P}\hat{h}^{(\mathbb{P})})_{\mathcal{N}}(k) = k^\mu [\hat{h}_{\mu\mathcal{N}}^{(\mathbb{P})}(k) - \frac{1}{M^2} k_\mu (\mathbb{P}\hat{h}^{(\mathbb{P})})_{\mathcal{N}}(k)] = 0, \quad (2.4.16)$$

donde hemos usado que  $-k^2 = M^2$  es la masa (cuadrada) de los estados dados en (2.4.12).

Esto indica que hay un grado de libertad físico

$$\hat{h}'_{\mu\mathcal{N}}^{(\mathbb{P})}(k) = \hat{h}_{\mu\mathcal{N}}^{(\mathbb{P})}(k) - \frac{1}{M^2} k_\mu (\mathbb{P}\hat{h}^{(\mathbb{P})})_{\mathcal{N}}(k) + \dots,$$

(donde  $\dots$  indican posibles términos que se anulan al ser contraídos con  $k^\mu$ ) o equivalentemente

$$\hat{h}'_{\mu\mathcal{N}}^{(\mathbb{P})}(x) = \hat{h}_{\mu\mathcal{N}}^{(\mathbb{P})}(x) + i \frac{1}{M^2} \partial_\mu (\mathbb{P}\hat{h}^{(\mathbb{P})})_{\mathcal{N}}(x),$$

satisfaciendo  $\partial^\mu \hat{h}'_{\mu\mathcal{N}}^{(\mathbb{P})}(x) = 0$ . La combinación  $(\mathbb{P}\hat{h}^{(\mathbb{P})})_{\mathcal{N}}$  juega el rol de campo de Goldstone. Analicemos ahora todo lo anterior en término de los campos componentes. Usando (2.3.13), (2.4.16) puede descomponerse en polarizaciones de gravitones, tensor antisimétrico y vectores



así

$$\begin{aligned}
k^\mu [\tilde{h}_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}(k) - \frac{1}{M^2} k_\mu (\mathbb{P} \cdot A^{(\mathbb{P})}(k))_\nu] &= 0, \\
k^\mu [b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}(k) + \frac{1}{M^2} k_\mu (\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A^{(\mathbb{P})}(k))_\nu] &= 0, \\
k^\mu [A_\mu^{(\mathbb{P})N}(k) - \frac{1}{M^2} k_\mu (\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})}(k) \cdot \overline{\mathcal{M}})^N] &= 0.
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Veamos cada uno de los campos en específico.

### Gravitones

La primera ecuación en (2.4.17) puede ser reescrita como

$$k^\mu \left\{ \tilde{h}_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} - \frac{1}{M^2} [k_\mu (\mathbb{P} \cdot A^{(\mathbb{P})})_\nu + k_\nu (\mathbb{P} \cdot A^{(\mathbb{P})})_\mu + k_\nu k_\mu \frac{1}{M^2} (\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P}) \right\} = 0,$$

donde se ha usado la tercer ecuación de (2.4.17). Por lo tanto, terminamos con un tensor simétrico efectivo con polarización  $\tilde{h}_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}$  que satisface

$$k^\mu \tilde{h}_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}(k) = 0, \tag{2.4.18}$$

donde

$$\tilde{h}_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}(k) = \tilde{h}_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} - \frac{1}{M^2} [k_\mu (\mathbb{P} \cdot A^{(\mathbb{P})})_\nu + k_\nu (\mathbb{P} \cdot A^{(\mathbb{P})})_\mu - k_\nu k_\mu \frac{1}{M^2} (\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P})] \tag{2.4.19}$$

está construido con la polarización original del gravitón, un campo vectorial  $(\mathbb{P} \cdot A)_\nu$  y un campo escalar  $\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P}$ , como era esperado del conteo de grados de libertad hecho anteriormente.

### Tensor Antisimétrico

Podemos proceder de forma similar para el tensor antisimétrico. De la segunda ecuación en (2.4.17) podemos escribir

$$k^\mu \{ b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} + \frac{1}{M^2} [k_\mu (\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A^{(\mathbb{P})})_\nu - k_\nu (\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A^{(\mathbb{P})})_\mu] \} + \frac{1}{M^2} k_\nu k^\mu (\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A^{(\mathbb{P})})_\mu = 0,$$

y usando la tercer ecuación de (2.4.17), el último término se modifica usando

$$k^\mu (\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A^{(\mathbb{P})})_\mu = -\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot h^{(\mathbb{P})} \cdot \mathbb{P}. \tag{2.4.20}$$

y resulta nulo a primer orden<sup>13</sup>, dejandonos con un tensor efectivo

$$b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} = b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} + \frac{1}{M^2} [k_\mu (\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A^{(\mathbb{P})})_\nu - k_\nu (\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A^{(\mathbb{P})})_\mu]. \tag{2.4.22}$$

---

<sup>13</sup>Para verlo, partimos de la condición  $\mathbb{P}^2 = 0$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^2 &= \mathbb{P}^M \mathcal{M}_{MN} \eta^{NK} \mathcal{M}_{KL} \mathbb{P}^L = \mathbb{P}^M (\overline{\mathcal{M}}_{MN} + \tilde{h}_{MN}) \eta^{NK} (\overline{\mathcal{M}}_{KL} + \tilde{h}_{KL}) \mathbb{P}^L \\
&= \mathbb{P}^2 + 2\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h} \cdot \mathbb{P} + \mathcal{O}(\tilde{h}^2)
\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

y por lo tanto  $\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h} \cdot \mathbb{P} = 0$

Se puede interpretar aquí que la polarización original  $b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}$  “come” solo un vector  $(\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A^{(\mathbb{P})})_\nu$ , lo cual está en consonancia con la discusión anterior sobre grados de libertad. Notar que fue importante que se anulara el término que contenía el escalar para que tal consonancia se produjera. Tal anulación es consecuencia directa de la LMC y la escitura  $O(n, n)$ .

## Vectores

La tercera ecuación (2.4.17) nos dice directamente que hay polarizaciones de vectores masivos

$$A_\nu'^{(\mathbb{P})N}(k) = A_\nu^{(\mathbb{P})N}(k) + \frac{1}{M^2} k_\nu (\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}})^N + \dots, \quad (2.4.23)$$

que satisfacen  $k^\nu A_\nu'^{(\mathbb{P})N} = 0$ .

Por lo tanto, de los  $2n$  vectores originales  $A_\mu^{(\mathbb{P})N}$ , la combinación  $\mathbb{P} \cdot A_\mu^{(\mathbb{P})}$  es absorbida por el gravitón y la combinación  $\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A_\mu^{(\mathbb{P})}$  por el campo  $b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}$  para volverse masivos, dejándonos con  $2n - 2$  vectores. Estos vectores, a su vez, se vuelven masivos al absorber  $2n - 2$  escalares de los  $n^2$  originales  $\tilde{h}_{MN}^{(\mathbb{P})}$ . Un grado más de libertad escalar (la combinación  $\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P}$ ) es tragada por el gravitón, por lo que al final quedan  $n^2 - (2n - 2) - 1 = (n - 1)^2$  escalares.

Notar que deberían resultar diferentes los vectores absorbidos por el gravitón que los absorbidos por  $b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}$ . Probemos que esto siempre es así: Las dos combinaciones son  $\mathbb{P} \cdot A^{(\mathbb{P})} = \mathbb{P} \cdot \eta \cdot A^{(\mathbb{P})}$  y  $\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A^{(\mathbb{P})}$ . Mostremos que son independientes al construirlas con ellas dos nuevas combinaciones que resultan explícitamente diferentes. A saber, tales son la suma y resta

$$\begin{aligned} A_L^{\mathbb{P}} &= \mathbb{P} \cdot (\eta - \overline{\mathcal{M}}) \cdot A^{(\mathbb{P})} \\ A_R^{\mathbb{P}} &= \mathbb{P} \cdot (\eta + \overline{\mathcal{M}}) \cdot A^{(\mathbb{P})} \end{aligned}$$

resultando siempre independientes ya que  $(\eta \pm \overline{\mathcal{M}})$  resultan ser proyectores de  $O(n, n)$ .

Estos grados de libertad físicos que hemos mostrado deben ser interpretados desde transformaciones generalizadas de gauge. Es decir, deberían existir unos parámetros de gauge  $\xi^{\mathcal{M}} = (\xi^\mu, \tilde{\xi}_\mu, \Lambda^M)$  de tal manera que al elegirlos adecuadamente, la transformación de gauge generalizada, de la forma (1.4.3), que surge de ellos, fije a cero los grados de libertad no-físicos

Mostremos como sucede esto explícitamente. Las transformaciones de los difeomorfismos generalizados (1.4.12), en términos de sus componentes y a primer orden en fluctuaciones, se leen

$$\delta_\xi \tilde{h}_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi^\lambda \eta_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda \eta_{\lambda\mu}, \quad (2.4.24)$$

$$\delta_\xi b_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{\xi}_\nu - \partial_\nu \tilde{\xi}_\mu, \quad (2.4.25)$$

$$\delta_\xi A_\mu^N = \partial_\mu \Lambda^N + \eta_{\lambda\mu} \overline{\mathcal{M}}^{N\mathcal{M}} \partial_{\mathcal{M}} \xi^\lambda - \partial^N \tilde{\xi}_\mu, \quad (2.4.26)$$

$$\delta_\xi \tilde{h}_{MN} = \overline{\mathcal{M}}_{MP} \partial_N \Lambda^P + \overline{\mathcal{M}}_{PN} \partial_M \Lambda^P - \overline{\mathcal{M}}_{MP} \partial^P \Lambda_N - \overline{\mathcal{M}}_{PN} \partial^P \Lambda_M. \quad (2.4.27)$$

Cuando miramos estas expresiones en modos GKK, las transformaciones se leen

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} &= \tilde{h}_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} + \delta_\xi \tilde{h}_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} = \tilde{h}_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} + ik_{(\mu}\eta_{\nu)\lambda}\xi^{\lambda(\mathbb{P})}, \\
b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} &= b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} + \delta_\xi b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} = b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})} + ik_{[\mu}\tilde{\xi}_{\nu]}^{(\mathbb{P})}, \\
A_\mu^{(\mathbb{P})N} &= A_\mu^{(\mathbb{P})N} + \delta A_\mu^{(\mathbb{P})N} = A_\mu^{(\mathbb{P})N} + ik_\mu\Lambda^{(\mathbb{P})N} + i\eta_{\lambda\mu}(\overline{\mathcal{M}}\mathbb{P})^N\xi^{(\mathbb{P})\lambda} - i\mathbb{P}^N\tilde{\xi}_\mu^{(\mathbb{P})}, \\
\tilde{h}_{MN}^{(\mathbb{P})} &= \tilde{h}_{MN}^{(\mathbb{P})} + \delta_\xi \tilde{h}_{MN}^{(\mathbb{P})} = i(\overline{\mathcal{M}}\Lambda_M^{(\mathbb{P})})\mathbb{P}_N + i(\overline{\mathcal{M}}\Lambda_N^{(\mathbb{P})})\mathbb{P}_M - i(\overline{\mathcal{M}}\mathbb{P})_M\Lambda_N^{(\mathbb{P})} - i(\overline{\mathcal{M}}\mathbb{P})_N\Lambda_M^{(\mathbb{P})}.
\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

Deberíamos imponer las condiciones que mostramos anteriormente

$$\mathbb{P} \cdot A_\mu^{(\mathbb{P})} = 0, \tag{2.4.29}$$

$$\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A_\mu^{(\mathbb{P})} = 0, \tag{2.4.30}$$

y fijar así los parámetros de gauge. Además debe ser fijado a cero el grado de libertad escalar que es absorbido por el gravit3n, es decir

$$\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P} = 0. \tag{2.4.31}$$

Al pedir todo esto, quedan fijados los parámetros  $\Lambda_N^{(\mathbb{P})}$ ,  $\xi^{(\mathbb{P})\lambda}$  y  $\tilde{\xi}_\nu^{(\mathbb{P})}$  para  $\mathbb{P} \neq 0$ , obteniendose los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
\xi^{(\mathbb{P})\lambda} &= i\frac{1}{M^2}\eta^{\lambda\mu}[(\mathbb{P} \cdot A_\mu^{(\mathbb{P})}) - k_\mu\frac{1}{2M^2}(\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P})], \\
\tilde{\xi}_\mu^{(\mathbb{P})} &= -i\frac{1}{M^2}\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A_\mu^{(\mathbb{P})}, \\
\Lambda^{(\mathbb{P})N} &= i\frac{1}{M^2}[(\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot h^{(\mathbb{P})} \cdot \mathcal{M})^N - \frac{1}{2M^2}(\overline{\mathcal{M}}\mathbb{P})^N\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot h^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P}].
\end{aligned} \tag{2.4.32}$$

Notando que  $\overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P} \cdot \Lambda^{(\mathbb{P})N} = 0$  y que  $\mathbb{P} \cdot \Lambda^{(\mathbb{P})N} = -\frac{1}{2M^2}\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P}$ , y usando la condici3n LMC ( $\mathbb{P}^2 = 0$ ), se ve que (2.4.30) y (2.4.31) se satisfacen. Al reemplazar los parámetros de gauge en (2.4.28), obtenemos expresiones explícitas en términos de los campos viejos. Por ejemplo, los campos físicos  $\tilde{h}_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}$ ,  $b_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}$  resultantes son exactamente los mostrados en (2.4.19) y (2.4.22), respectivamente. Además resultan

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{MN}^{(\mathbb{P})} &= -(\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})})_M\mathbb{P}_N \\
&\quad + \frac{1}{M^2}(\overline{\mathcal{M}}\mathbb{P})_M[\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}}]_N - \frac{1}{2M^2}(\overline{\mathcal{M}}\mathbb{P})_N\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P} + M \leftrightarrow N
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
A_\mu^{(\mathbb{P})N} &= A_\mu^{(\mathbb{P})N} - k_\mu\frac{1}{M^2}(\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}})^N \\
&\quad - \frac{1}{M^2}(\overline{\mathcal{M}}\mathbb{P})^N[(\mathbb{P} \cdot A_\mu^{(\mathbb{P})}) - \frac{1}{M^2}k_\mu(\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \tilde{h}^{(\mathbb{P})} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P})] \\
&\quad - \frac{1}{M^2}\mathbb{P}^N(\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A_\mu^{(\mathbb{P})}).
\end{aligned} \tag{2.4.33}$$

Además, es fácil ver que los vectores físicos satisfacen

$$k \cdot A'^{(\mathbb{P})N} = 0. \quad (2.4.34)$$

como es de esperarse para un vector masivo. Más aún, es importante hacer notar que bajos las transformaciones de gauge  $\delta_{\xi^{(\mathbb{P})}} = (\delta_{\xi^{\mu^{(\mathbb{P})}}}, \delta_{\tilde{\xi}^{\mu^{(\mathbb{P})}}}, \delta_{\Lambda^{M^{(\mathbb{P})}}})$  como las que están dadas en (2.4.28), los campos físicos  $A'^{(\mathbb{P})N}_\mu, \tilde{h}'_{\mu\nu}, b'_{\mu\nu}, \tilde{h}'_{MN}^{(\mathbb{P})}$  son *invariantes*, mostrando así que son el verdadero contenido físico de la teoría. Esto es exactamente análogo a cuando en electromagnetismo las combinaciones del vector de gauge que dan lugar al campo eléctrico y magnético resultan invariantes  $U(1)$ . Aquí serían  $A'^{(\mathbb{P})N}_\mu, \tilde{h}'_{\mu\nu}, b'_{\mu\nu}, \tilde{h}'_{MN}^{(\mathbb{P})}$  las combinaciones físicas que son invariantes ante las simetrías internas (todavía no se fijaron aquellas asociadas a  $\delta_{\xi^{(0)}}$ ).

Por último, veamos qué ocurre con la descomposición de un tensor simétrico en las partes con y sin traza. Claramente ésta puede ser realizada al sumar o restar la traza.

Sea la contribución de la traza de la forma  $\tilde{h}_{\mu\nu}^{\phi^{(\mathbb{P})}} = \tilde{h}'_{\lambda}{}^{\lambda^{(\mathbb{P})}}(k) \epsilon_{\mu\nu}^{\phi}(k)$  con  $\epsilon_{\mu\nu}^{\phi}(k) = f_d(\mathbb{P})(\eta_{\mu\nu} + k_\mu \chi_\nu^{(\mathbb{P})} + k_\nu \chi_\mu^{(\mathbb{P})})$ , donde se ha usado que existe una libertad de incluir un parámetro de difeomorfismos  $\chi_\nu$  y  $f_d$  es un factor numérico (el cual depende de la masa). Los  $\chi_\nu$  se eligen de manera que  $k^\mu \epsilon_{\mu\nu}^{\phi}(k) = 0$ . Por lo tanto, si el modo es no-masivo debe cumplir  $k_\mu \chi^{(0)\mu} = -1$ , mientras que si el modo es masivo, con masa  $M^2 = \mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot \mathbb{P}$ , deben cumplir  $\chi_\mu^{(\mathbb{P})} = \frac{1}{2M^2} k_\mu$ .

Por lo tanto, para el gravitón simétrico *sin* traza, la polarización resulta

$$\tilde{h}'_{\mu\nu}{}^{G^{(\mathbb{P})}}(k) = \tilde{h}'_{\mu\nu}^{(\mathbb{P})}(k) - \tilde{h}'_{\mu}{}^{\mu^{(\mathbb{P})}}(k) \epsilon_{\mu\nu}^{\phi}(k), \quad (2.4.35)$$

con  $f_d = \frac{1}{d-2}$  para los modos no-masivos y  $f_d = \frac{1}{d-1}$  para los masivos.

Todavía podemos elegir el grado de libertad  $\tilde{h}'_{\lambda}{}^{\lambda}$ . Una opción conveniente es  $Tr(\tilde{h}') = \tilde{h}'_{\lambda}{}^{\lambda} = 4\phi$ , donde  $\phi$  es el campo del dilatón, y esta equivale a fijar  $\hat{d} = 0$  (ver 2.3.15).

En realidad, para poder comparar más fácilmente con cuerdas, resulta útil redefinir el dilatón como  $\phi'^{(\mathbb{P})} = \sqrt{f_d} \phi^{(\mathbb{P})}$ , y por lo tanto la polarización queda

$$\epsilon_{\mu\nu}^{\phi'}(k) = \sqrt{f_d(\mathbb{P})}(\eta_{\mu\nu} + k_\mu \chi_\nu^{(\mathbb{P})} + k_\nu \chi_\mu^{(\mathbb{P})}). \quad (2.4.36)$$

Por construcción queda normalizada  $\epsilon^{\phi'}(\mathbb{P}) \cdot \epsilon^{\phi'}(\mathbb{P}) = 1$  y también cumple  $\epsilon^{\phi'}(\mathbb{P}) \cdot \epsilon^G(\mathbb{P}) = 0$ . Cabe señalar que la elección  $\hat{d} = 0$  elimina la dependencia en  $\hat{d}$  del Lagrangiano (2.3.6), pero la parte del dilatón está ahora incluida en la expansión  $\tilde{h}'_{\mu\nu} = \tilde{h}'_{\mu\nu}{}^G + \tilde{h}'_{\mu\nu}{}^{\phi}$ .

Con todo esto, el Lagrangiano a orden cúbico que se debe considerar queda

$$L_{DFT} = -\frac{1}{2} \hat{h}'^{\mathcal{M}\mathcal{N}} \partial_{\mathcal{M}} \hat{h}'^{\mathcal{K}\mathcal{L}} \partial_{\mathcal{K}} \hat{h}'_{\mathcal{N}\mathcal{L}} + \frac{1}{8} \hat{h}'^{\mathcal{M}\mathcal{N}} \partial_{\mathcal{M}} \hat{h}'^{\mathcal{K}\mathcal{L}} \partial_{\mathcal{N}} \hat{h}'_{\mathcal{K}\mathcal{L}}, \quad (2.4.37)$$

donde solo los campos físicos identificados arriba deben ser considerados.

### Sobre la Fijación de Gauge

En este punto puede llegar a existir una confusión, pareciera que hablamos al principio sobre fijar un gauge (el armónico) y por otro lado sobre fijar un gauge que mostrara los grados de libertad físicos. Veamos que ambas cosas son compatibles, al mostrar que las transformaciones que hemos usado para encontrar los g.d.l. físicos preservan la condición de gauge armónico, y

por lo tanto la expresión para la acción en tal gauge puede ser aún utilizada.

Explícitamente,  $\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{H}^{\mathcal{M}\mathcal{L}}$  se transforma a  $\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{H}^{\mathcal{M}\mathcal{L}} \rightarrow \partial_{\mathcal{M}}\mathcal{H}^{\mathcal{M}\mathcal{L}} + \delta_{\xi}(\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{H}^{\mathcal{M}\mathcal{L}})$  cuando un difeomorfismo generalizado es aplicado, y de (1.4.12) leemos

$$\begin{aligned} \delta_{\xi}(\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{H}^{\mathcal{M}\mathcal{L}}) &= \partial_{\mathcal{P}}\xi_{\mathcal{M}}\partial^{\mathcal{P}}\mathcal{H}^{\mathcal{M}\mathcal{L}} - 2\partial_{\mathcal{M}}\partial_{\mathcal{P}}\xi^{\mathcal{M}}\mathcal{H}^{\mathcal{L}\mathcal{P}} - 2\partial_{\mathcal{M}}\partial_{\mathcal{P}}\xi^{\mathcal{L}}\mathcal{H}^{\mathcal{M}\mathcal{P}} \\ &\quad + 2\partial_{\mathcal{M}}\partial^{\mathcal{M}}\xi_{\mathcal{P}}\mathcal{H}^{\mathcal{L}\mathcal{P}} + 2\partial_{\mathcal{M}}\partial^{\mathcal{L}}\xi_{\mathcal{P}}\mathcal{H}^{\mathcal{M}\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Al ser ya los parámetros de gauge  $\xi^{\mathcal{M}}$  de primer orden en los campos, obtenemos, usando la LMC, que

$$\delta_{\xi}(\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{H}^{\mathcal{M}\mathcal{L}}) = -2\bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}\mathcal{P}}\partial_{\mathcal{P}}\partial_{\mathcal{M}}\xi^{\mathcal{M}} - 2\bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{M}\mathcal{P}}\partial_{\mathcal{M}}\partial_{\mathcal{P}}\xi^{\mathcal{L}} + 2\partial^{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{M}\mathcal{P}}\partial_{\mathcal{M}}\xi_{\mathcal{P}}). \quad (2.4.38)$$

El segundo término es cero debido a la ecuación de movimiento (ver 2.4.9) y es fácil ver que tanto  $\partial_{\mathcal{M}}\xi^{\mathcal{M}}$  como  $\bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\partial_{\mathcal{N}}\xi_{\mathcal{M}}$  son cero para transformaciones con los parámetros  $\xi^{\mathcal{M}}$  que encuentras los grados de libertad.

En conclusión, el gauge armónico no fija completamente la libertad de gauge y por lo tanto es posible usar las simetrías remanentes para eliminar los grados de libertad tipo Goldstone.

### 2.4.3. Goldstone y Ruptura Espontanea en KK

Hagamos un breve comentario sobre el término Goldstones que hemos utilizado y su uso en rupturas de simetría. Usualmente los grados de libertad de Goldstone están asociados a rupturas espontaneas de simetría por el valor de expectación en el vacío de algún campo. Resulta que aquí ocurre algo similar<sup>14</sup>.

Al comenzar en dimensiones altas, todos los difeomorfismos están presentes y por lo tanto la simetría de difeomorfismos generalizados está completa. Al compactificar en un toro doble, los valores de expectación en el vacío son

$$\begin{aligned} \langle g_{\mu\nu} \rangle &= \eta_{\mu\nu}, \\ \langle A_{\mu}^M \rangle &= \langle b_{\mu\nu} \rangle = 0, \\ \langle \mathcal{H}_{MN} \rangle &= \bar{\mathcal{M}}_{MN}. \end{aligned}$$

Estos valores hacen que solo los modos cero de los parámetros  $\xi_{\mathcal{M}}^{(0)}(x)$  dejen invariante al vacío, mientras que las transformaciones asociadas a los modo distintos de cero  $\xi_{\mathcal{M}}^{(\mathbb{P})}$  estén espontáneamente rotas<sup>15</sup>.

Al final, los parámetros internos  $\Lambda^M(x)$  de los difeomorfismos generalizados se transforman en parámetros de una simetría  $U(1)_M$  de gauge, bajo la cual transforman los campos

<sup>14</sup>Esto ha sido ya discutido en otros trabajos sobre compactificaciones KK extensamente, ver [5, 19, 20].

<sup>15</sup>Discutimos el álgebra de difeomorfismos en el Apéndice.

físicos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\delta g^{\mu\nu} &= \Lambda^M \partial_N g^{\mu\nu}, \\
\delta A^N &= \Lambda^M \partial_M A^N + d\Lambda^M, \\
\delta b &= \Lambda^M \partial_M b + \frac{1}{2} A^M \wedge d\Lambda_M, \\
\delta \mathcal{M}_{MN} &= \Lambda^P \partial_P \mathcal{M}_{MN},
\end{aligned} \tag{2.4.39}$$

donde estas ecuaciones se deben entender en términos de los modos GKK. Recordar que  $\partial_M \Lambda^N = 0$ , i.e. no dependen de las coordenadas internas, y  $d\Lambda_M = 0$  para modos masivos.

Para los modos no-masivos  $A^{(0)N}$ , se obtienen las transformaciones usuales de gauge. Resulta de particular interés la transformación de la 2-forma  $b$  (tanto para modos masivos como no-masivos), ya que involucra, via los términos Chern Simons, a los vectores. La combinación covariante más simple en la que pueden aparecer es

$$\begin{aligned}
H &= (d - A^M \wedge \partial_M) b + \frac{1}{2} A^M \wedge (d - A^N \wedge \partial_N) A_M, \\
B_M &= \partial_M b + \frac{1}{2} A^N \wedge \partial_M A_N,
\end{aligned} \tag{2.4.40}$$

donde  $H$  y  $B_M$  son unas 3-forma y 2-forma espaciotiempo, respectivamente. Mostraremos que esta combinación covariante es la que aparece exactamente en el lagrangiano.

#### 2.4.4. Acción efectiva a orden cúbico

Ya hemos identificado los campos físicos, por lo que ahora procederemos a considerar la acción a tercer orden<sup>16</sup> (2.4.37) expandiendo los índices en internos y externos.

Obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{4} D_\mu g_{\nu\rho} D_\sigma g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} - \frac{1}{2} D_\mu g_{\nu\rho} D_\sigma g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \\
& - \frac{1}{4} \mathcal{M}_{MN} F_{\mu\nu}^M F^{N\mu\nu} + \frac{1}{8} g^{\mu\nu} D_\mu \mathcal{M}_{MN} D^\mu \mathcal{M}^{MN} \\
& + \frac{1}{4} \mathcal{M}^{MN} \partial_M g_{\mu\nu} \partial_N g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{M}_{MN} \partial_P A_\mu^M \partial_Q A_\nu^N g^{\mu\nu} \mathcal{M}^{PQ} + \frac{1}{8} \mathcal{M}^{PQ} \partial_P \mathcal{M}_{MN} \partial_Q \mathcal{M}^{MN} \\
& - \frac{1}{4} \mathcal{M}^{MN} B_{M\mu\nu} B_{N\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - \frac{1}{2} \mathcal{M}^{MN} B_{M\mu\nu} F_{N\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \\
& + \frac{1}{2} \mathcal{M}^{MN} \partial_M A_\mu^P D_\nu \mathcal{M}_{NP} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{M}^{MN} \partial^P A_{M\mu} D_\nu \mathcal{M}_{NP} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^M A_\mu^N \partial_N A_{M\nu} g^{\mu\nu} \\
& - \frac{1}{2} \mathcal{M}^{MN} \partial_M \mathcal{M}^{PQ} \partial_P \mathcal{M}_{NQ} + \frac{1}{2} \mathcal{M}^{MN} \mathcal{M}^{PQ} \partial_M A_{P\mu} \partial_Q A_{N\nu} g^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{2.4.41}$$

donde además de las interacciones cúbicas hemos permitido algunas otras de mayor orden necesarias para tener invariancia ante gauge y difeomorfismos.

<sup>16</sup>Una propuesta alternativa de esta acción puede encontrarse en [21].

Aquí

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^M &= D_{[\mu}A_{\nu]}^M \equiv \partial_{[\mu}A_{\nu]}^M - A_{[\mu}^N\partial_N A_{\nu]}^M \equiv \partial_\mu A_\nu^M - \partial_\nu A_\mu^M - A_\mu^N\partial_N A_\nu^M + A_\nu^N\partial_N A_\mu^M \\
H_{\mu\nu\rho} &= D_{[\mu}b_{\nu\rho]} - \frac{1}{2}A_{[\mu}^M D_\nu A_{\rho]M} \\
&\equiv D_\mu b_{\nu\rho} + D_\nu b_{\rho\mu} + D_\rho b_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(A_\mu^M D_\nu A_{\rho M} + A_\nu^M D_\rho A_{\mu M} + A_\rho^M D_\mu A_{\nu M}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(A_\mu^M D_\rho A_{\nu M} + A_\nu^M D_\mu A_{\rho M} + A_\rho^M D_\nu A_{\mu M}) \\
B_{M\mu\nu} &= \partial_M b_{\mu\nu} + \frac{1}{2}A_{[\mu}^N \partial_M A_{N\nu]} \\
&\equiv \partial_M b_{\mu\nu} + \frac{1}{2}A_\mu^N \partial_M A_{N\nu} - \frac{1}{2}A_\nu^N \partial_M A_{N\mu}, \tag{2.4.42}
\end{aligned}$$

y las derivadas están definidas como

$$D_\mu = \partial_\mu - A_\mu^M \partial_M. \tag{2.4.43}$$

Recordar que aquí debe desarrollarse  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ,  $\mathcal{M}_{MN} = \overline{\mathcal{M}}_{MN} + h_{MN}$ , etc.

Vale mencionar algunas características de este Lagrangiano. Primero, (2.4.41) tiene una forma compacta debido a la escritura explícita  $O(n, n)$ . Segundo, todos los campos allí dependen tanto de las coordenadas espacio-tiempo como de las internas, por lo que deben ser expandidos en modos GKK, de acuerdo con (2.4.14). Tercero, los modos GKK corresponden a los campos físicos, y recordar que al actuar sobre los campos en el desarrollo GKK,  $-i\partial_M \rightarrow \mathbb{P}_M$  no es otra cosa que el operador de carga.

La acción contiene términos de interacción cúbicos y cinéticos tanto de estados masivos como no-masivos. Aparecen también derivadas covariantes y términos Chern-Simons en el tensor antisimétrico en la forma usual. Solo para visualizar mejor, la derivada  $D_\mu$  en (2.4.43) produce, cuando se expande en modos y actúa sobre un campos  $\Phi^{(\mathbb{P})}(x)$ , una derivada covariantizada

$$D_\mu \Phi^{(\mathbb{P})}(x) = (\partial_\mu - iA_\mu^{(0)M} \mathbb{P}_M) \Phi^{(\mathbb{P})}(x) + \dots, \tag{2.4.44}$$

donde  $\mathbb{P}_M$  es la carga “eléctrica” con respecto a un  $U(1)_M$  de gauge del campo  $A_\mu^{(0)M}$ . Los (...) indican términos de a forma  $A_\mu^{(\mathbb{K})M} \Phi^{(\mathbb{P}-\mathbb{K})}(x)$  que aparecen al desarrollar en modos. Tales términos no son relevantes para covariantizar la derivada del modo  $\mathbb{P}$ .

De la ecuación (2.4.2) sabemos que los campos están cargados frente a  $(A_\mu^{(0)m}, \tilde{A}_{m\mu}^{(0)})$  con cargas  $(\frac{n_m}{R^{(m)}}, \frac{w^m}{\tilde{R}^{(m)}})$  las cuales, en general, no son enteras. Si queremos que resulten enteras, debemos redefinir

$$A_\mu^{(0)m} \rightarrow R^{(m)} A_\mu'^{(0)m}, \tag{2.4.45}$$

$$\tilde{A}_{m\mu}^{(0)} \rightarrow \tilde{R}^{(m)} \tilde{A}_{m\mu}'^{(0)}. \tag{2.4.46}$$

Por lo tanto, de aquí vemos que al usar la definición estandar  $-\frac{1}{4g_d^2}$  para el coeficiente del término cuadrático del tensor de campo de los vectores en el Lagrangiano  $d$ -dimensional, los

acoplamientos de gauge y gravitacional están relacionados

$$g_d'^{(m)2} = \frac{2\kappa_d^2}{R^{(m)2}}, \quad \tilde{g}_{d(m)}^2 = \frac{2\kappa_d^2}{\tilde{R}_{(m)}}, \quad \kappa_d^2 = \kappa^2 e^{2\bar{d}}. \quad (2.4.47)$$

Vale aclarar que como el dilatón generalizado es invariante  $O(n, n)$ ,  $\kappa_d$  es invariante, como se espera.

Los modos no-masivos de la primera línea de (2.4.41) dan lugar a la acción extendida de Einstein-Hilbert (1.4.1), en  $d$  dimensiones. La segunda línea contiene tanto al el término cinético Abelian  $-\frac{1}{4}\overline{\mathcal{M}}_{MN}F_{\mu\nu}^{(0)M}F^{(0)N\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(0)\dot{M}}F_M^{(0)\mu\nu}$  como al cinético de los escalares, cuando se miran modos no-masivos. La tercera línea tiene términos de gavitones, vectores y escalares masivos. Por ejemplo, el término con vectores da

$$-\frac{1}{2}\overline{\mathcal{M}}_{MN}A_\mu^{(\mathbb{P})M}A_\nu^{(-\mathbb{P})N}g^{\mu\nu}\mathbb{P}\overline{\mathcal{M}}\mathbb{P} = -\frac{1}{2}A_{\mu M}^{(\mathbb{P})}A_\nu^{(-\mathbb{P})\dot{M}}g^{\mu\nu}\mathbb{P}\dot{\mathbb{M}}\mathbb{P}_M, \quad (2.4.48)$$

que debido a que  $M^2 = \mathbb{P}\overline{\mathcal{M}}\mathbb{P} = \mathbb{P}\dot{\mathbb{M}}\mathbb{P}_M$ , resulta ser el término de masa del vector (además da lugar a otros términos cuando aparecen modos del gravitón, pero estos ya son de orden cúbico y no afectan la masa)

Más adelante, en (2.5.22) y de modo pedagógico, daremos una expansión completa de la acción en el caso de la compactificación sobre un círculo.

Enfatizamos que la acción (2.4.41) es una acción efectiva invariante de gauge. El sector no-masivo está compuesto por gravedad+Kalb-Ramond+Vectores+escalares, acoplados a los correspondientes modos masivos de la torre de KK que contienen tanto momento interno como winding. Todas las herramientas necesarias para el cómputo de amplitudes, tales como reglas de Feynman, propagadores, etc, pueden ser obtenidas explícitamente. Todo esto provee una generalización de trabajos previos [22, 23] en los cuales compactificaciones tipo KK de gravedad fueron consideradas con diversos propósitos fenomenológicos.

Para la comparación con teoría de cuerdas debemos comparar con las amplitudes en capa de masa.

## 2.5. Análisis en Teoría de Cuerdas

En esta sección trabajaremos con la Teoría de Cuerdas con background toroidales constantes  $G_{pn}$  y  $B_{mp}$  para la métrica y el tensor antisimétrico respectivamente. El objetivo será comparar con la acción de DFT mostrada en la sección anterior. Analizaremos los operadores de vértice que crean los estados físicos, discutiremos los cálculos de amplitudes de tres puntos y contrastaremos los resultados con los obtenidos en la sección anterior dentro de DFT. Por las razones esbozadas anteriormente, trabajaremos con estados de número de osciladores  $N = \bar{N} = 1$ . Los vértices que se originan a partir de aquí se analizarán de dos formas diferentes:

Por un lado mostraremos que si no se impone ninguna condición sobre las polarizaciones de los vértices, una combinación de ellos (que involucra vectores, tensores, escalares) es necesaria



para cancelar la anomalía conforme. Tal combinación puede ser identificada con las expresiones encontradas en el gauge armónico generalizado en DFT y puede ser interpretado como una manifestación del mecanismo de Higg sobre la hoja de mundo.

Por otro lado, si imponemos condiciones de polarización, veremos que se corresponden con las correspondientes encontradas en DFT cuando utilizamos la invariancia ante difeomorfismos generalizados para encontrar los grados de libertad físicos.

### 2.5.1. Relación entre Anomalías Conformes y Gauge Armónico Generalizado

En general, los vértices en cuerdas requieren condiciones de polarización sobre ellos para evitar que surjan anomalías (conformes) con el tensor de energía-momento de la hoja mundo. Tales condiciones se traducen al espacio-tiempo como requerimientos de gauge sobre los campos. Aquí los diferentes operadores de vértice, correspondientes a 2-tensores, vectores y escalares, tendrán en general un OPE anómalo con el tensor de energía. Para los modos no-masivos, la cancelación del término anómalo da lugar a la condición ya familiar  $k^\mu \epsilon_{\mu\nu}^G(k) = 0$ ,  $k^\mu \epsilon_\mu^M(k) = 0$ , etc. para las polarizaciones de los tensores de gravitones, vectores, etc. Éstas se corresponden a la ecuación (2.4.17) para momento GKK nulo.

Para campos masivos, una combinación de diferentes vértices puede ser considerada, de tal manera que la suma de diferentes contribuciones de términos anómalos se cancelen. Esto representa una manifestación en la hoja mundo del mecanismo de Higgs. La condición de cancelación puede ser escrita en un lenguaje  $O(n, n)$  y puede verse que coincide con la condición de gauge armónico encontrada en DFT

Los vértices con los que estamos trabajando, son, a menos de normalizaciones,

$$\begin{aligned} V_G &= \epsilon_{\rho\sigma}^G(k, k_L, k_R) : \partial X^\rho \bar{\partial} X^\sigma e^{ik \cdot X + ik_L \cdot Y + ik_R \cdot \bar{Y}} : , \\ V_{A_R} &= \epsilon_{R\rho}^a(k, k_L, k_R) : \partial X^\rho \bar{\partial} \bar{Y}^a e^{ik \cdot X + ik_L \cdot Y + ik_R \cdot \bar{Y}} : , \\ V_{A_L} &= \epsilon_{L\rho}^a(k, k_L, k_R) : \partial Y^a \bar{\partial} X^\rho e^{ik \cdot X + ik_L \cdot Y + ik_R \cdot \bar{Y}} : , \\ V_\phi &= \phi_{ab}(k, k_L, k_R) : \partial Y^a \bar{\partial} \bar{Y}^b e^{ik \cdot X + ik_L \cdot Y + ik_R \cdot \bar{Y}} : \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Aquí el índice  $G$  denota genéricamente estados con polarización simétrica sin traza, antisimétrica, o solo traza,  $A_L, A_R$  son vectores y  $\phi$  escalares. Además  $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}, \partial = \partial_z$  y  $Y = Y(z), \bar{Y} = \bar{Y}(\bar{z})$  son las coordenadas tipo Left y Rightd. Conviene usar coordenadas  $Y^a = e_m^a Y^m$  con índices del espacio tangente  $a, b, \dots$ , definidos en término de los vielbein  $e_m^a$  ( $\delta^{ab} = e_m^a g^{mn} e_n^b$ ) ya que ellos tienen OPEs estandar. A saber, los propagadores se leen

$$\begin{aligned} \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(w, \bar{w}) \rangle &= -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z - w|^2, \\ \langle Y^a(z) Y^b(w) \rangle &= -\delta^{ab} \frac{\alpha'}{2} \ln(z - w), \quad \langle \bar{Y}^a(\bar{z}) \bar{Y}^b(\bar{w}) \rangle = -\delta^{ab} \frac{\alpha'}{2} \ln(\bar{z} - \bar{w}). \end{aligned}$$

Los momentos que aparecen en los vértices son

$$k_{aL} = e_a^m p_{mL}, \quad k_{aR} = e_a^m p_{mR}, \quad (2.5.2)$$

con

$$p_L^m = \tilde{p}^m + g^{mn}(p_n - B_{nk}\tilde{p}^k), \quad p_R^m = -\tilde{p}^m + g^{mn}(p_n - B_{nk}\tilde{p}^k).$$

El tensor de energía (tipo Left) de la hoja mundo es

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'}(\eta_{\mu\nu} : \partial X^\mu(z) \partial X^\nu(z) : + \delta_{ab} : \partial Y^a(z) \partial Y^b(z) :),$$

y una expresión análoga para el tipo Right. Los OPEs son

$$\begin{aligned} T(z_1)V_G(z_2) &= \left[\frac{\alpha'}{4}(k^2 + k_L^2) + 1\right] \frac{V_G}{z_{12}^2} - 2i \frac{\alpha'}{4z_{12}^3} [: k^\rho \epsilon_{\rho\sigma}^G \partial \bar{X}^\sigma e^{ik \cdot X + ik_L \cdot Y + ik_R \cdot \bar{Y}} :] + \dots, \\ T(z_1)V_{A_L} &= \left[\frac{\alpha'}{4}(k^2 + k_L^2) + 1\right] \frac{V_{A_L}}{z_{12}^2} - 2i \frac{\alpha'}{4z_{12}^3} [: k_L^a \epsilon_{L\rho}^a \partial \bar{X}^\rho e^{ik \cdot X + ik_L \cdot Y + ik_R \cdot \bar{Y}} :] + \dots, \\ T(z_1)V_{A_R} &= \left[\frac{\alpha'}{4}(k^2 + k_L^2) + 1\right] \frac{V_{A_R}}{z_{12}^2} - 2i \frac{\alpha'}{4z_{12}^3} [: k^\rho \epsilon_{R\rho}^a \partial \bar{Y}^a e^{ik \cdot X + k_L \cdot Y + k_R \cdot \bar{Y}} :] + \dots, \\ T(z_1)V_\phi &= \left[\frac{\alpha'}{4}(k^2 + k_L^2) + 1\right] \frac{V_\phi}{z_{12}^2} - 2i \frac{\alpha'}{4z_{12}^3} [: k_L^a \phi_{ab} \partial \bar{Y}^b e^{ik \cdot X + ik_L \cdot Y + ik_R \cdot \bar{Y}} :] + \dots. \end{aligned}$$

Debido a que  $k_L^2 = -k^2$ , los vértices tienen peso conforme correcto  $h = 1$  (y similar con  $\bar{h} = 1$ ), sin embargo, hay anomalías cúbicas que deben ser canceladas. Como hemos mencionado, una manera de hacerlo es considerar combinaciones de diferentes vértices; veamos por ejemplo la siguiente para gravitones masivos

$$V = \alpha V_G + \beta V_{A_L} + \gamma V_{A_R} + \delta V_\phi, \quad (2.5.3)$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  son constantes a determinar. Para el OPE con  $T$  y  $\bar{T}$ , las condiciones de cancelación de anomalías son

$$\begin{aligned} \alpha k^\rho \epsilon_{\rho\sigma} + \beta k_L^a \epsilon_{L\sigma}^a &= 0, & \alpha k^\rho \epsilon_{\rho\sigma} + \gamma k_R^a \epsilon_{R\sigma}^a &= 0, \\ \delta k_L^a \phi_{ab} + \gamma \epsilon_{R\sigma}^b k^\sigma &= 0, & \delta k_R^a \phi_{ba} + \gamma k^\rho \epsilon_{L\rho}^b &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Elijiendo  $2\alpha = \gamma = \beta$ , la suma de las primeras dos ecuaciones da

$$k^\rho \epsilon_{\rho\sigma}^G + k_L^a \epsilon_{La} + k_R^a \epsilon_{Ra} = k^\rho \epsilon_{\rho\sigma}^G + \tilde{p}^m \tilde{\epsilon}_{m\sigma} + g^{mn} p_n \epsilon_{m\sigma} = k^\rho \tilde{h}_{\rho\sigma}^{(\mathbb{P})} + \mathbb{P} \cdot A_\sigma^{(\mathbb{P})} = 0, \quad (2.5.5)$$

donde se ha definido

$$\epsilon_{m\sigma} = \epsilon_{Lm\sigma} + \epsilon_{Rm\sigma}, \quad \tilde{\epsilon}_{m\sigma} + B_{mn} \epsilon_\sigma^n = \epsilon_{Lm\sigma} - \epsilon_{Rm\sigma}, \quad (2.5.6)$$

y se ha hecho la identificación

$$A_{M\sigma}^{(\mathbb{P})} = (A_{m\sigma}^{(\mathbb{P})}, A_{\sigma}^{(\mathbb{P})m}) \equiv (\tilde{\epsilon}_{m\sigma}, \epsilon_{\sigma}^m), \quad \epsilon_{\rho\sigma}^G \equiv \tilde{h}_{\rho\sigma}^{(\mathbb{P})}. \quad (2.5.7)$$

Por lo tanto, (2.5.5) no es otra cosa más que la primera condición de gauge armónico de (2.3.21) en el espacio de momentos.

Por otro lado, al tomar la resta (en lugar de la suma) de las primera dos ecuaciones de (2.5.4), obtenemos

$$k_L \epsilon_L - k_R \epsilon_R = \tilde{p}^m \epsilon_{m\sigma} + g^{mn} (p_n + B_{nk} \tilde{p}^k) (\tilde{\epsilon}_{m\sigma} + B_{mp} \epsilon_{\sigma}^p) = 0,$$

la cual puede ser reescrita como

$$\mathbb{P} \cdot \overline{\mathcal{M}} \cdot A_{\sigma}^{(\mathbb{P})} = 0, \quad (2.5.8)$$

como fue encontrado en (2.4.30).

Las otras dos ecuaciones que involucran a escalares dan lugar a

$$\begin{aligned} \delta(k_L^m \phi_{mn} + k_R^n \phi_{mn}) + \gamma k \cdot (\epsilon_L^m + \epsilon_R^m) &= 2\delta g^{mn} (p_n + B_{nk} \tilde{p}^k) \phi_{mn} + \gamma k \cdot \epsilon_n = 0, \\ \delta(k_L^m \phi_{mn} - k_R^n \phi_{mn}) - \gamma k \cdot (\epsilon_{mL} - \epsilon_{mR}) &= 2\delta \tilde{p}^m \phi_{mn} - \gamma k \cdot (\tilde{\epsilon}_n + B_{nl} \cdot \epsilon^l) = 0, \end{aligned}$$

de las cuales se puede ver que conciben con la tercer ecuación de la condición de gauge armónico en (2.3.21) cuando se elige  $\delta = \frac{1}{2}\gamma$  y se hace una identificación con los campos escalares de DFT (2.3.14)

$$\begin{aligned} \phi^{mn} + \phi^{nm} &= \tilde{h}^{mn}, \\ \phi^{mn} - \phi^{nm} &= b^{mn}. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Entonces, una podría tomar como vértice físico del gravitón a

$$V = \frac{1}{2} V_G + V_{A_L} + V_{A_R} + \frac{1}{2} V_{\phi}. \quad (2.5.10)$$

Pasos similares podrían seguirse para encontrar el análogo para el campo Kalb-Ramond y la segunda ecuación en (2.3.21) se obtiene.

A continuación veremos la otra versión de cancelación de anomalías, la cual es más cómoda para trabajar en amplitudes, pero no refleja el mecanismo de Higgs oculto.

## 2.5.2. Vértices Físicos sobre el Toro

En lugar de buscar combinaciones de vértices que sean libres de anomalías (y encontrar así las condiciones del gauge armónico), podemos pedir que cada vértice (2.5.1) por si mismo sea libre de anomalías. Esto daría lugar a condiciones de polarización de estados físicos (ahora denotados con una prima). En el caso de la compactificación sobre un círculo, este proceso dirá que no existen polarizaciones físicas para vectores y escalares masivos, confirmando así que no hay tales grados de libertad.

La condición de cancelación de anomalías para vectores es

$$\begin{aligned} k_L^a \epsilon_{L\rho}^{'a} &= 0, & k_R^a \epsilon_{R\rho}^{'a} &= 0, \\ k^\rho \epsilon_{L\rho}^{'a} &= 0, & k^\rho \epsilon_{R\rho}^{'a} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Las primeras dos ecuaciones pueden combinarse de la siguiente manera

$$k_L^a \epsilon_{L\rho}^{'a} + k_R^a \epsilon_{R\rho}^{'a} = 0 \quad \text{or as} \quad k_L^a \epsilon_{L\rho}^{'a} - k_R^a \epsilon_{R\rho}^{'a} = 0, \quad (2.5.12)$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \cdot A'_\mu &= 0, \\ \mathbb{P} \cdot \mathcal{M} \cdot A'_\mu &= 0, \\ \partial^\mu A'_\mu{}^B &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Es decir, son las condiciones halladas en (2.4.30) luego de la fijación de gauge. De forma análoga, para escalares se obtiene

$$k_L^a \phi^{'ab} = 0, \quad k_R^b \phi^{'ab} = 0, \quad (2.5.14)$$

la cuales pueden ser expresadas en términos de  $\tilde{h}'_{mn}$  y  $b'_{mn}$  como

$$\begin{aligned} -\tilde{p}^m \tilde{h}'_{mn} + \tilde{p}^m B_{mk} G^{ks} b'_{sn} + p_m G^{mk} b'_{kn} &= 0, \\ -\tilde{p}^m b'_{mn} + \tilde{p}^m B_{mk} G^{ks} \tilde{h}'_{sn} + p_m G^{mk} \tilde{h}'_{kn} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Éstas coinciden con las condiciones de DFT (ver 2.4.31)

$$\mathbb{P} \cdot M \cdot \tilde{h}' \cdot M = 0, \quad (2.5.16)$$

las cuales representan a los bosones de Goldstone absorbidos por los vectores masivos.

Para  $\tilde{h}'_{\mu\nu}$  y  $b'_{\mu\nu}$  se encuentran las condiciones de transversalidad usual en el espacio de momento

$$\begin{aligned} k^\mu \tilde{h}'_{\mu\nu} &= 0, \\ k^\mu b'_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Finalmente, para el dilatón el vértice puede ser escrito como

$$V_\phi = \phi \epsilon_{\mu\nu}^\phi \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ik \cdot X}, \quad (2.5.18)$$

con

$$\epsilon_{\mu\nu}^\phi = \sqrt{f_d} (\eta_{\mu\nu} + k_\mu \bar{k}_\nu + k_\nu \bar{k}_\mu), \quad (2.5.19)$$

como fue encontrado en (2.4.36) al indentificar  $\bar{k}_\nu \equiv \chi_\nu^{(0)}$  para el caso no-masivo y  $\bar{k}_\nu \equiv \chi_\nu^{(\mathbb{P})}$  para el dilatón masivo.

En conclusión hemos encontrado las condiciones de polarización que deben cumplir los estados físicos de la cuerda y estas coinciden con las encontradas en DFT al usar los difeo-

morfismos generalizados para quedarnos con los grados de libertad físicos. Resaltemos una vez más, que estos difeomorfismos no tienen aplicada la SC pero si la LMC y dejan la acción a tres puntos invariante. Esto es altamente no trivial, ya que los usamos para fijar condiciones en infinitos g.d.l. tanto masivos como no masivos y obtenemos exactamente lo mismo que en cuerdas.

Enfatizamos que ambos enfoques al tratar con los operadores de vértice proveen diferente información sobre la teoría: El primero muestra cómo ocurre el mecanismo de Higgs con los bosones Goldstone. El segundo muestra exactamente a los g.d.l. físicos una vez que el gauge es fijado. Cualquiera de los dos puede usarse en el cálculo de amplitudes, pero el segundo es mucho más cómodo de utilizar.

### 2.5.3. Interacciones de Tres Campos

Ahora pasaremos a considerar las funciones de 3-puntos para estados de la cuerda masivos y no-masivos creados por los vértices descritos arriba. Las amplitudes que resultan se comparan luego con la acción (2.4.37) de DFT, evaluada en capa de masa. Los cálculos se esbozan aquí y además se proporcionan algunos detalles más para el caso del círculo en el Apéndice A.

Para resultar más claros, empezaremos por analizar el caso de la compactificación sobre el círculo. Resulta particularmente simple ya que no existen ni vectores ni escalares masivos. Debido a la LMC cada modo GKK posee momento o winding, pero no ambos simultáneamente. Vale aclarar que esto ya es así en cuerdas, y esto no tiene nada que ver con la SC. En efecto, al expandir en modos alguno de ellos tendrán dependencia en la coordenada interna o otros en su dual.

La matriz  $S$  de amplitudes en acuerdas de 3-puntos se presenta en (A.2). Cuando se expande en modos (2.4.37) y usando las identificaciones (2.5.7) y (2.5.9) entre tensores de polarización de la cuerda y polarizaciones de campos en DFT, se obtiene una completa coincidencia siempre y cuando identifiquemos

$$\pi g_c = \frac{1}{2\kappa_d^2}, \quad (2.5.20)$$

donde  $g_c$  es el acoplamiento de la cuerda cerrada.

La acción efectiva invariante  $U(1) \times U(1)$  gauge, contiene tanto estados no-masivos como masivos. Si además la completamos<sup>17</sup> con términos de mayor orden al invocar invariancia ante difeomorfismos y gauge, obtenemos

$$S = \frac{1}{2\kappa_d^2} \int d^{D-1}x \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (2.5.21)$$

---

<sup>17</sup>Recordar que trabajamos siempre con la acción a tres campos. Términos de mayor orden pueden agregarse por autoconsistencia, invocando algún principio que es sabido que debe estar presente, como por ejemplo simetrías.

con

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & R - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho}^2 - \frac{1}{4} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \\
& - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Phi - \frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \Phi \\
& - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mathcal{D}_\rho h_{\mu\nu}^{*(n)} \mathcal{D}^\rho h^{(n)\mu\nu} - 2 \mathcal{D}_\mu h_{\nu\rho}^{*(n)} \mathcal{D}^\nu h^{(n)\mu\rho} + m_n^2 h_{\mu\nu}^{*(n)} h^{(n)\mu\nu} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{w=1}^{\infty} \left( \mathcal{D}_\rho \tilde{h}_{\mu\nu}^{*(w)} \mathcal{D}^\rho \tilde{h}^{(w)\mu\nu} - 2 \mathcal{D}_\mu \tilde{h}_{\nu\rho}^{*(w)} \mathcal{D}^\nu \tilde{h}^{(w)\mu\rho} + m_w^2 \tilde{h}_{\mu\nu}^{*(w)} \tilde{h}^{(w)\mu\nu} \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{6} |H_{\mu\nu\rho}^{(n)}|^2 + \frac{m_n^2}{2} |b_{\mu\nu}^{(n)}|^2 \right) + \sum_{w=1}^{\infty} \left( \frac{1}{6} |\tilde{H}_{\mu\nu\rho}^{(w)}|^2 + \frac{m_w^2}{2} |\tilde{b}_{\mu\nu}^{(w)}|^2 \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{n^2}{R^2} \left( |h_{\mu\nu}^{(n)}|^2 + |b_{\mu\nu}^{(n)}|^2 \right) \Phi - \sum_{w=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{w^2}{\tilde{R}^2} \left( |\tilde{h}_{\mu\nu}^{(w)}|^2 + |\tilde{b}_{\mu\nu}^{(w)}|^2 \right) \Phi \\
& - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R} \left( h_{\mu\nu}^{*(n)} b_{\rho}^{(n)\nu} + h_{\mu\nu}^{(n)} b_{\rho}^{*(n)\nu} \right) \tilde{F}^{\mu\rho} - i \sum_{w=1}^{\infty} \frac{w}{\tilde{R}} \left( \tilde{h}_{\mu\nu}^{*(w)} \tilde{b}_{\rho}^{(w)\nu} + \tilde{h}_{\mu\nu}^{(w)} \tilde{b}_{\rho}^{*(w)\nu} \right) F^{\mu\rho} \\
& + \sum_{n_1+n_2+n_3=0}^{n_i \neq 0} \left( \frac{1}{4} \mathcal{D}_\mu h_{\rho\sigma}^{(n_1)} \mathcal{D}_\nu h^{(n_2)\rho\sigma} h^{(n_3)\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\rho}^{(n_1)} \mathcal{D}^\mu h_{\nu\sigma}^{(n_2)} \mathcal{D}^\nu h^{(n_3)\rho\sigma} \right) \\
& + \sum_{w_1+w_2+w_3=0}^{w_i \neq 0} \left( \frac{1}{4} \mathcal{D}_\mu \tilde{h}_{\rho\sigma}^{(w_1)} \mathcal{D}_\nu \tilde{h}^{(w_2)\rho\sigma} \tilde{h}^{(w_3)\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{h}_{\mu\rho}^{(w_1)} \mathcal{D}^\mu \tilde{h}_{\nu\sigma}^{(w_2)} \mathcal{D}^\nu \tilde{h}^{(w_3)\rho\sigma} \right) \\
& + \sum_{n_1+n_2+n_3=0}^{n_3 \neq 0} \left( \frac{1}{4} \mathcal{D}_\mu b_{\rho\sigma}^{(n_1)} \mathcal{D}_\nu b^{(n_2)\rho\sigma} h^{(n_3)\mu\nu} - \mathcal{D}_\mu b^{(n_1)\sigma\nu} \mathcal{D}_\nu b_{\sigma\rho}^{(n_2)} h^{(n_3)\mu\rho} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} b^{(n_1)\rho\mu} \mathcal{D}_\mu b^{(n_2)\sigma\nu} \mathcal{D}_\nu h_{\rho\sigma}^{(n_3)} \right) \\
& + \sum_{w_1+w_2+w_3=0}^{w_3 \neq 0} \left( \frac{1}{4} \mathcal{D}_\mu \tilde{b}_{\rho\sigma}^{(w_1)} \mathcal{D}_\nu \tilde{b}^{(w_2)\rho\sigma} \tilde{h}^{(w_3)\mu\nu} - \mathcal{D}_\mu \tilde{b}^{(w_1)\sigma\nu} \mathcal{D}_\nu \tilde{b}_{\sigma\rho}^{(w_2)} \tilde{h}^{(w_3)\mu\rho} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \tilde{b}^{(w_1)\rho\mu} \mathcal{D}_\mu \tilde{b}^{(w_2)\sigma\nu} \mathcal{D}_\nu \tilde{h}_{\rho\sigma}^{(w_3)} \right)
\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

donde  $\Phi$  denota los escalares no-masivos;  $h_{\mu\nu}^{(n)}$  y  $\tilde{h}_{\mu\nu}^{(w)}$  los modos masivos del gravitón con momento  $n$  y winding  $w$  respectivamente;  $b_{\mu\nu}^{(n)}$  y  $\tilde{b}_{\mu\nu}^{(w)}$  los modos masivos del tensor antisimétrico con momento  $n$  y winding  $w$  respectivamente.

Además se han introducido las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu f_{\rho\sigma} &= \partial_\mu f_{\rho\sigma} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda f_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda f_{\rho\lambda}, \\
\Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \\
F_{\mu\nu} &= \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \\
\mathcal{D}_\mu &= \nabla_\mu - i A_\mu \hat{q}_n - i \tilde{A}_\mu \hat{q}_w, \\
H_{\mu\nu\rho} &= \mathcal{D}_\mu b_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\rho b_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\nu b_{\rho\mu}.
\end{aligned} \tag{2.5.23}$$

Aquí los índices son subidos con la métrica  $g_{\mu\nu}$ ,  $\hat{q}$  es el operador de carga, la conjugación en

complejos se denota con  $*$  y, bajo la operación de conjugación de carga, el momento (y el winding) cambian de signo i.e  $h^{(n)*} = h^{(-n)}$ .

Los términos cinéticos de los gravitones masivos reproducen el bien conocido Lagrangiano de Fierz-Pauli [18, 24]. La simetría de T-dualidad  $R \leftrightarrow \tilde{R}, n \leftrightarrow w$  se manifiesta explícitamente. Esta acción coincide con (2.4.41) cuando se la especifica para el caso de la compactificación al círculo.

#### 2.5.4. Caso del Toro Genérico

Generalizar los resultados obtenidos para el círculo al caso del Toro genérico es inmediato. El único inconveniente que aparece es que ahora el número de términos que aparecen en el Lagrangiano es muchísimo mayor. En el sector no-masivo, además del gravitón, dilatón y Kalb-Ramond, aparecen  $2n$  campos de gauge asociados con la simetría  $U(1)^n \times U(1)^n$  y escalares transformando ante ella. Sin embargo, el sector masivo incluye ahora además, en general, modos de vectores y escalares masivos. Partiendo de la acción de DFT (2.4.37) desarrollada a orden cúbico y en modos GKK, la comparación con amplitudes realizadas con los vértices (2.5.1) sea realiza con la ayuda del programa de álgebra simbólica llamado XCadabra [25].

Algorítmicamente, lo que se hace es comparar amplitudes en capa de masa de DFT y cuerdas, usando sistemáticamente la conservación de momento, chequeando una por una hasta agotar casos.

Como ejemplo de tales cálculos, veamos algún caso típico del tipo de amplitudes con las que se trabaja: Amplitud entre el tensor  $b_{\mu\nu}$  (con momento  $k_{1\mu}$ , cargas  $p_{1m}$  y  $w^{1m}$ ), un vector  $A_{L\mu}^m$  (con momento  $k_{2\mu}$ , y cargas  $p_{2m}$  y  $w^{2m}$ ) y un escalar antisimétrico  $b_{mn}$  (con momento  $k_{3\mu}$ , y cargas  $p_{3m}$  y  $w^{3m}$ ).

En la acción de DFT hay un único donde tal interacción puede encontrarse, y es

$$- \frac{1}{2\kappa_d^2} \partial_M b_{\mu\nu} \partial_\rho A_{N\sigma} M^{MN} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} . \quad (2.5.24)$$

Expandiendo los índices internos dobles, para así exhibir las contribuciones explícitas de los escalares  $b_{mn}$  y  $h_{mn}$ , pueden recolectarse solo aquellas pertinentes (descartando aquellas en las que aparece  $h_{mn}$ ) y calcular la amplitud de tres puntos. El resultado es

$$\frac{1}{2\kappa_d^2} \epsilon_{\mu\nu} (k_1) \epsilon_{L\mu m} (k_2) G^{mm} b_{nk} (k_3) [k_{2\nu} w^{1k} - G^{ks} (k_3) k_{2\nu} p_{1s} + B_{sl} G^{sk} (k_3) k_{2\nu} w^{1l}] ,$$

donde  $\epsilon_{\mu\nu}$ ,  $\epsilon_{L\mu m}$  y  $b_{nk}$  son las polarizaciones de la 2-forma, el vector Left y el escalar, respectivamente. El mismo resultado se obtiene en cuerdas si se elige  $\frac{1}{2\kappa_d^2} = \pi g_c$ .

## 2.6. Comentarios finales del Capítulo

Se logró incluir en DFT simultáneamente momentos internos de KK y windings en el contexto de una expansión de Fourier en la teoría doble, tratando así de manera genérica con estados masivos.

La construcción está en total acuerdo con la Teoría de Cuerdas Bosónica, via la comparación con las misma de las amplitudes de scattering. Desde ya la comparación se realiza con un subsector de estados de la cuerda: no-masivos y masivos con  $N - \bar{N} = 0$ , ya que estos son los que han sido incluidos en esta construcción de DFT.

Es importante señalar que la LMC fue impuesta sobre la expansión en modos de DFT para lograr una coincidencia entre los modos de Fourier y los estados en la Teoría de Cuerdas Bosónica. No solo eso, sino que además la acción resultante de DFT, expandida a tercer orden en fluctuaciones de los campos concuerda exactamente con la acción efectiva proveniente de las amplitudes de tres puntos realizadas en cuerdas. Al tener infinitos modos, la acción posee un número infinito de campos

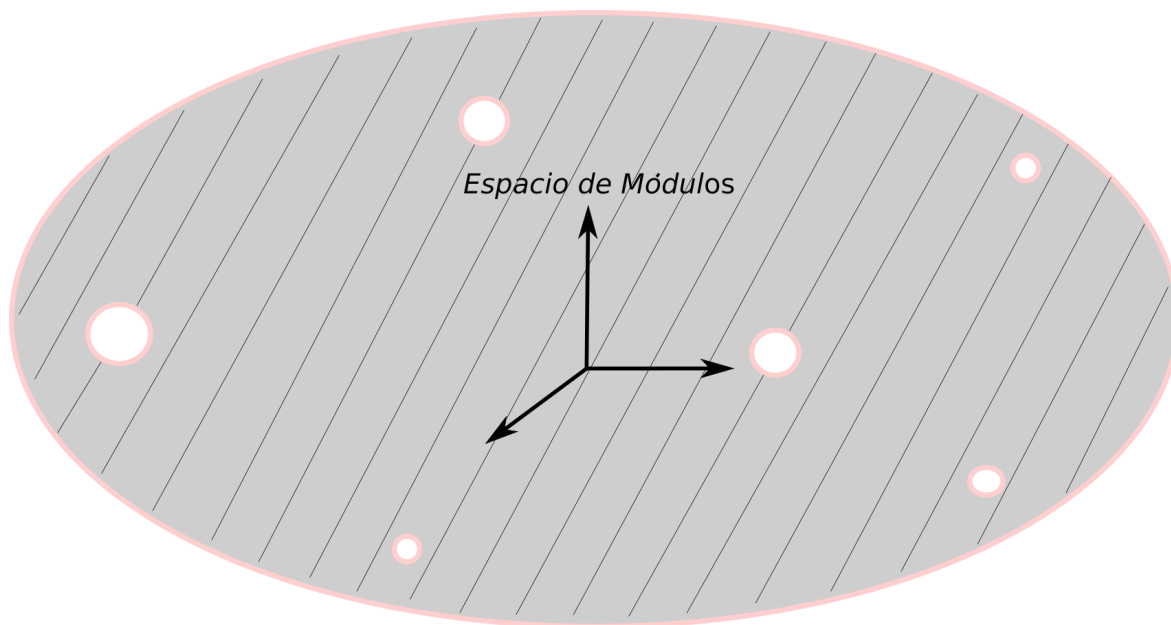
Encontramos que la invariancia ante difeomorfismos generalizados deja a la acción con el mismo contenido físico que la cancelación de anomalías en los vértices de cuerdas produce. En particular esto fue logrado via la elección, en DFT, del gauge armónico, el cual deja manifiesto los modos Golstone que son absorbidos para generar los campos físicos. La invariancia ante difeomorfismos generalizados está garantizada al orden en fluctuaciones gracias a la LMC, lo cual no es un detalle menor. La relajación de la SC a LMC es algo que es buscado desde el inicio de DFT.

Desde ya que la acción obtenida que reproduce amplitudes de tres puntos entre estados masivos y/o no-masivos físicos no es una acción efectiva de bajas energías ya que todos los posibles niveles de masa estan involucrados. Más bien, la acción provee una truncación organizada de la Teoría de Cuerdas. Esta es incompleta pues contiene estados con igual o mayor masa que otros de la cuerda con distinto número de osciladores, los cuales no han sido incluidos aquí. Se sabe de cuerdas que nuevos campos con spin más alto (asociados a un mayor número de osciladores) aparecen en el espectro y juegan un papel crucial en amplitudes de scattering con un mayor número de campos. Se espera que en el lenguaje de DFT, nuevos campos tensoriales  $O(n, n)$  de mayor orden sean incorporados para incorporar a los grados de libertad de spin superior.

Si consideramos, de los infinitos modos, aquellos términos que involucren estados no-masivos, i.e.  $\mathbb{P} = 0$ , encontramos que la acción efectiva que los describe es una teoría de gauge con grupo  $G = U(1)^n \times U(1)^n$ . Si ahora miramos los campos masivos encontramos que estos presentan una estructura en el Lagrangiano invariante ante  $G = U(1)^n \times U(1)^n$ . De hecho, tal simetría proviene, al igual que en las compactificaciones de Kaluza-Klein ordinarias, de los difeomorfismos en altas dimensiones. Una de las cosas que **no** podemos decir, es que el sector no-masivo de la acción obtenida describe *siempre* el correspondiente al de cuerdas para todo valor de los módulos  $(G_{mn}, B_{mn})$ . Más bien, el esquema que tenemos logrado hasta el momento luce como en la Figura 2.1.

Como explicaremos en el siguiente Capítulo, para valores muy espacíficos de los módulos, nuevos estados con  $\mathbb{P} \neq 0$  se vuelven no masivos. En particular, dentro de estos estados hay vectores del espacio tiempo, por lo que el grupo de gauge de la teoría efectiva de bajas energías se ve *aumentado* de  $G = U(1)^n \times U(1)^n$  a otro grupo  $G'$ , en general no-Abeliano. Este fenómeno se conoce como “aumento de simetría” y es característico de la cuerda, ya que como se explicó





**Figura 2.1:** El espacio de módulos, conformado por los valores de  $(G_{mn}, B_{mn})$ . Los huecos representan zonas del espacio de módulos donde la acción propuesta **no describirá** el sector no-masivo de la teoría debido al fenómeno de aumento de simetría. Nuevos estados, con valores de  $\mathbb{P} \neq 0$  deben ser agregados a la acción.

en el Capítulo 1, las compactificaciones toroidales de las teorías de gravedad usuales dan como resultado grupos de gauge asociados al toro (grupos Abelianos). Que sea característico de la cuerda también queda manifiesto ya que los nuevos estados tienen simultáneamente, en general, momento interno de KK y winding no triviales.

Además estos estados nuevos requieren, como veremos, que  $\bar{N} \neq N$ , por lo que no se los puede pensar como modos de los campos incluidos hasta ahora en DFT.

Vale la pena señalar que las zonas excluidas ocupan un volumen finito, no son solo un punto. A medida que nos acercamos los estados que serán no-masivos empiezan a perder masa de manera continua. Por lo tanto, cerca del punto de aumento de simetría, estos estados, por más que sean masivos, serán lo suficientemente livianos como para tenerlos en cuenta en una teoría fenomenológica de las cuerdas.

En el próximo Capítulo comenzaremos con el tratamiento de estos puntos de especiales de espacio de módulos.



## Capítulo 3

# Aumento de Simetría en el Espacio de Módulos

En el Capítulo anterior hemos mostrado como utilizando DFT se puede dar una descripción de la teoría de cuerdas (bosónica) que incluya estados con winding (masivos) sin la necesidad de imponer la SC, sino más bien la LMC, como es de esperar que suceda.

Se podría pensar a priori que con lo ya realizado se logra dar una descripción para cualquier compactificación toroidal de la cuerda (i.e. cualquier valor de los módulos). Como veremos en este Capítulo, resulta que la descripción es incompleta. Existen determinados valores de los módulos (i.e. determinados radios de compactificación, llamados puntos de aumento de simetría) para los cuales aparecen nuevos estados no-masivos (con winding y momento KK) los cuales aumentan el grupo de simetría del genérico Abelian  $U(1)^{2n}$  a uno no-Abeliano. Es decir, el Lagrangiano efectivo que describa a la cuerda debería tener a todos los campos transformando en representaciones del grupo de gauge no-Abeliano. El Lagrangiano propuesto en el Capítulo anterior no tiene tal propiedad, al desarrollar en modos nunca dará lugar a grupos de simetría no-Abelianos. Por lo tanto, nuestra descripción fenomenológica de la cuerda está incompleta.

El objetivo de este Capítulo es mostrar una técnica para dar una descripción fenomenológica de la cuerda que tenga en cuenta los puntos de aumento de simetría, siempre en el lenguaje de DFT. Veremos que además podremos cubrir los “alrededores”, es decir, los valores de los módulos cercados al punto de aumento de simetría. Específicamente, daremos Lagrangianos que, cada uno por su cuenta, cubren los alrededores de los puntos fijos, i.e. son una descripción fenomenológica de la cuerda bosónica en dichas zonas del espacio de módulos. En el proceso nos encontraremos con un mecanismo de Higgs cuerdoso: Al mover los módulos en cada Lagrangiano el grupo de simetría se romperá o aumentará. Veremos explícitamente como aparecen g.d.l. tipo Goldstone.

En el Capítulo siguiente daremos una descripción análoga para la cuerda Heterótica (ya que es la única de las supercuerdas que presenta el efecto de aumento de simetría) teniendo en cuenta incluso a los fermiones.

El formalismo presentado en este (y el próximo) Capítulo parecerá no tener relación con

lo realizado en el Capítulo 2, ya que aquí no realizaremos ninguna expansión en modos. Cabe preguntarse si existe alguna unificación de estas dos técnicas. Tal cosa será abordada en el Capítulo 5 en el que desarrollaremos una “unificación” que puede describir fenomenológicamente a la cuerda (heterótica) en **todo** el espacio de módulos via un desarrollo en modos GKK, permitiendo así una “interpolación” entre los distintos puntos del espacio.

### 3.1. El Aumento de Simetría

Al compactificar la cuerda (bosónica) sobre un Toro, en general la simetría resulta Abeliiana. Más específicamente, queda un  $U(1)^{2n}$ , donde  $n$  es el número de dimensiones compactificadas y todos los estados con winding y momento resultan masivos. Sin embargo, existen valores específicos de los radios de compactificación para los cuales nuevos estados, con winding y momento KK no triviales, se vuelven no-masivos y dan lugar a un aumento del grupo de simetría de gauge. En general, dicho grupo aumentado es no-Abeliano.

Veremos ahora un ejemplo para familiarizarnos con este fenómeno en un caso simple: La compactificación a un círculo de la cuerda bosónica.

#### 3.1.1. Caso del Círculo: $SU(2)$

Al compactificar la cuerda sobre un círculo de radio  $R$  genérico, se obtiene que la fórmula de masa de los estados y la LMC son

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2) + \frac{p^2}{R^2} + \frac{\tilde{p}^2}{\tilde{R}^2} \quad (3.1.1)$$

$$\bar{N} - N = p\tilde{p}.$$

En general, el sector no-masivo resulta de tomar  $N = \bar{N} = 1$  y  $p = \tilde{p} = 0$ , siendo este el sector típico de gravedad (métrica, Kalb-Ramond, dilatón, 2 vectores y 1 escalar provenientes de la métrica y el Kalb-Ramond en 10 dimensiones).

Cuando el radio toma el valor específico  $R = \sqrt{\alpha'} = \tilde{R}$ , es decir cuando coincide con su dual, nuevos estados no-masivos aparecen portando ahora valores no triviales de winding y momento KK. A saber, tales son

- $N = 0, \bar{N} = 1$  con  $(p, \tilde{p}) = \pm(1, 1)$
- $N = 1, \bar{N} = 0$  con  $(p, \tilde{p}) = \pm(1, -1)$
- $N = 0, \bar{N} = 0$  con  $(p, \tilde{p}) = \pm(2, 0)$
- $N = 0, \bar{N} = 0$  con  $(p, \tilde{p}) = \pm(0, 2)$

En los primeros dos casos, cuando el oscilador es externo, los estados resultantes son vectores no-masivos. Estos son los que dan lugar al aumento del grupo de simetría de gauge. Cuando los osciladores resultan internos, resultan ser escalares no-masivos y deberán estar cargados

frente al nuevo grupo de gauge resultante. Por último, cuando no hay osciladores (tercer y cuarto caso) resultan también escalares, los cuales también deben estar cargados.

El grupo de gauge que aparece en esta situación es un  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ . Es decir, los dos  $U(1)$  fueron promovidos a  $SU(2)$ . Organicemos los estados de acuerdo a sus operadores de vértice, para luego mostrar como se deduce el grupo de gauge en cuestión y de paso fijar la notación de cada campo. Primero vale la pena definir en Teoría de Cuerdas las corrientes  $J^3(z) = \partial Y$  y  $J^\pm(z) = e^{\pm i\mathbb{P} \cdot Y(z)}$ , donde  $Y$  es el campo de la cuerda en componente interna y  $\mathbb{P} = (\tilde{p}, p)$  como definimos en Capítulos anteriores. Estas corrientes tienen su análogo Right cuando la dependencia queda<sup>1</sup> en  $\bar{z}$ .

Con esto presente, la organización de los estados no-masivos en operadores de vértice queda:

1. Los tres vectores que generan el  $SU(2)_L$  tienen  $\bar{N}_x = 1$ ,  $N_x = \bar{N}_y = 0$ . El que tiene  $N_y = 1, p = \tilde{p} = 0$  corresponde a uno de los provenientes del desarrollo KK de la métrica y el Kalb-Ramond en 10 dimensiones (Cartanes) y los denotamos  $A_\mu^3$ , mientras que aquellos con  $N_y = 0, p = \tilde{p} = \pm 1$ , resultan en vectores “cargados”  $A_\mu^\pm$ , respectivamente<sup>2</sup>. Los correspondientes operadores de vértice son, a menos de un factor global,

$$V^i(z, \bar{z}) = \epsilon_\mu^i : J^i(z) \bar{\partial} X^\mu e^{iK \cdot X} : \quad (3.1.2)$$

donde  $i = \pm, 3$ ; el subíndice  $x$  denota osciladores externos y el  $y$  internos;  $z = \exp(-i\sigma + \tau)$ . Es decir, el subíndice en  $SU(2)_L$  no es adrede, sino que viene de que todos los vértices involucrados son tipo Left.

2. Los tres vectores del  $SU(2)_R$  tienen  $N_x = 1$ ,  $\bar{N}_x = N_y = 0$ . Cuando  $\bar{N}_y = 1, p = \tilde{p} = 0$  se obtiene el Cartan  $\bar{A}_\mu^3$ , y para  $\bar{N}_y = 0, p = -\tilde{p} = \pm 1$  se obtienen los cargados  $\bar{A}_\mu^\pm$ , respectivamente. Los vértices asociados son, a menos de un factor global,

$$\bar{V}^i(z, \bar{z}) = \bar{\epsilon}_\mu^i : \partial X^\mu \bar{J}^i(\bar{z}) e^{iK \cdot X} : \quad (3.1.3)$$

donde nuevamente vemos, que el subíndice en  $SU(2)_R$  hace alusión a la naturaleza Right de éstos.

3. Los nueve escalares obtenidos al fijar los osciladores externos a cero, es decir  $N_x = \bar{N}_x = 0$ , están listados a continuación.

$$\begin{array}{ll} a) \ N_y = 1, \bar{N}_y = 1, p = \tilde{p} = 0 & : \ M_{33} \\ b) \ N_y = 1, \bar{N}_y = 0, p = -\tilde{p} = \pm 1 & : \ M_{3\pm} \end{array}$$

<sup>1</sup>Para los valores de  $P$  mostrados arriba, la dependencia de  $J^\pm$  en  $z$  o  $\bar{z}$  queda dependiendo del valor específico de  $P$ . Lo importante es que solo una queda, o bien la corriente resulta holomorfa o antiholomorfa.

<sup>2</sup>El nombre “Cargados” y “Cartanes” no es casualidad. Los vértices de estos estados responden a una representación del álgebra del grupo de gauge en cuestión, la cual aparece escrita naturalmente en la base Cartan-Weyl. Tal base tiene representantes llamados Cartanes y Cargados y resultan ser exactamente los mismo que aquí. Además, los cargados resultan estar literalmente cargados ante el grupo  $U(1)$ <sup>2</sup> cuando la simetría se encuentre rota como veremos más adelante

$$\begin{aligned}
c) \quad N_y = 0, \bar{N}_y = 1, p = \tilde{p} = \pm 1 & : M_{\pm 3} \\
d) \quad \bar{N}_y = N_y = 0, p = \pm 2, \tilde{p} = 0 & : M_{\pm \pm} \\
e) \quad \bar{N}_y = N_y = 0, p = 0, \tilde{p} = \pm 2 & : M_{\pm \mp}
\end{aligned}$$

donde en la columna de la derecha figuran los nombres que se le ha dado a cada estado. Los correspondientes operadores de vértice pueden aglutinarse en

$$V^{ij}(z, \bar{z}) = \phi_{ij} : J^i(z) \bar{J}^j(\bar{z}) e^{iK \cdot X} : . \quad (3.1.4)$$

Notar que tienen dos índices, uno asociado a corrientes Left y otro a corrientes Right. Además, por supuesto, están los operadores usuales del gravitón, Kalb-Ramond y dilatación que hemos explicado en el Capítulo anterior.

Veamos ahora por qué la simetría que aparece es un  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , y no otro grupo. Las corrientes (Left) satisfacen la siguiente relación de OPE:

$$J^i(z) J^j(0) \sim \frac{\kappa^{ij}}{z^2} + i \frac{f^{ij}_k}{z} J^k(0) + \dots \quad (3.1.5)$$

donde  $\kappa^{ij} = \frac{1}{2} \delta^{ij}$  y las  $f_{ijk}$  resultan ser las constantes de estructura

$$f^{ijk} = \kappa^{kl} f^{ij}_l = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk}. \quad (3.1.6)$$

de  $SU(2)$  ( $\epsilon^{ijk}$  es el tensor de Levi-Civita). Por lo tanto, cierran un álgebra, la cual se manifestará en la teoría de campos. Las corrientes Right cierran la misma álgebra entre sí, dando lugar al otro  $SU(2)$ . Como no hay mezcla entre Left y Right el grupo de simetría resultante es el mencionado<sup>3</sup>.

Ahora veremos como incorporar esta situación al campo de trabajo de DFT. Luego veremos como generalizarlo para abarcar una región alrededor del punto de aumento de simetría, dando lugar de esta manera a un mecanismo de aumento de Higgs. De esta manera habremos logrado un “parche” en alguno de los huecos de la Figura 2.1.

### 3.1.2. Aumento del Espacio Tangente

Como fue mostrado en [26], una manera de incorporar el aumento de simetría a DFT es utilizar compactificaciones de Scherk-Schwarz agregando direcciones al espacio tangente (para representar este aumento). Explícitamente la construcción se hace proponiendo vielbeins generalizados que permitan obtener los flujos necesarios para reproducir el Lagrangiano efectivo de la teoría. Veamos explícitamente como hacerlo para este caso y luego generalizaremos para compactificaciones toroidales más generales.

<sup>3</sup>Si esto aún no convence al lector, otro argumento más directo sería el siguiente: Al calcularse amplitudes de scattering entre tres vectores no-masivos, éstas quedan proporcionales a  $V^i V^j V^k = f^{ijk}$ , por lo tanto el término del Lagrangiano efectivo que involucre a estos vectores también tiene como coeficiente las constantes de estructura.

En DFT usual en  $D$  dimensiones, los  $D^2$  grados de libertad de la métrica, Kalb-Ramond y dilatón se embeben en el marco de  $O(D, D)$  a través del coset  $\frac{O(D, D)}{O(D) \times O(D)}$ . Aquí, es decir sobre el radio autodual, tenemos una cantidad de grados de libertad no-masivos en  $d$  dimensiones espacio-temporales igual a  $(d+3)^2$ :  $d^2$  del gravitón y del Kalb-Ramond,  $6d$  de los vectores y 9 de los escalares. Todos ellos pueden ser embebidos, precisamente en el coset  $\frac{O(d+3, d+3)}{O(d+3) \times O(d+3)}$ .

Si cambiamos el tamaño del radio y salimos del punto autodual, los grados de libertad no-masivos resultantes se embeben en un  $\frac{O(d+1, d+1)}{O(d+1) \times O(d+1)}$ . Esto sugiere, que el espacio tangente aumenta tanto como la cantidad de nuevos estados no-masivos que aparecen. En el caso del círculo, al tener 2 vectores no-masivos nuevos<sup>4</sup> el tangente aumenta en esa cantidad.

En compactificaciones de DFT tipo Scherk-Schwarz, conviene trabajar con la formulación de DFT en términos de los vielbein generalizados  $E_A^M$ , en lugar de con la métrica generalizada  $\mathcal{H}_{MN}$ . La relación entre ambas cantidades fue mostrada en el Capítulo 1. Como ya fue explicado también allí, las compactificaciones de Scherk-Schwarz necesitan algún grupo global para poder definir la expansión, el cual en DFT resulta ser  $O(d, d)$ , pero aquí utilizaremos el coset  $\frac{O(d+3, d+3)}{O(d+3) \times O(d+3)}$  mencionado anteriormente para dar cuenta de todos los campos necesarios para describir la simetría. La expansión de SS queda, en general, como

$$E_A^M(x, \mathbb{Y}) = \mathcal{U}_A^{A'}(x) E_{A'}^M(\mathbb{Y}). \quad (3.1.7)$$

La matriz  $\mathcal{U}_A^{A'}(x)$  da cuenta de los campos en la teoría efectiva, mientras que  $E_{A'}^M(\mathbb{Y})$  es un vielbein generalizada que depende solo de las coordenadas internas. De esta manera resulta

$$\mathcal{H}^{MN}(x, \mathbb{Y}) = \mathcal{H}^{A'B'}(x) E_{A'}^M(\mathbb{Y}) E_{B'}^N(\mathbb{Y}) \quad (3.1.8)$$

donde  $\mathcal{H}^{A'B'}(x)$  viene dada por

$$\mathcal{H}^{A'B'}(x) = S^{AB} \mathcal{U}_A^{A'} \mathcal{U}_B^{B'}(x) \quad (3.1.9)$$

Insertando estas expresiones en el Lagrangiano usual de DFT puede reescribirse al mismo de la siguiente manera

$$\begin{aligned} S_{eff} = & \frac{1}{2\kappa_d^2} \int d^d x \sqrt{g} e^{-2\varphi} \left[ \mathcal{R} + 4\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} \mathcal{H}_{AB} F^{A\mu\nu} F_{\mu\nu}^B + \frac{1}{8} (D_\mu \mathcal{H})_{AB} (D^\mu \mathcal{H})^{AB} - V \right]. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

donde

$$V = -\frac{1}{12} f_{AB}{}^K f_{LC}{}^D (\mathcal{H}^{AL} \mathcal{H}^{BC} \mathcal{H}_{KD} - 3 \mathcal{H}^{AL} \eta^{BC} \eta_{KD} + 2 \eta^{AL} \eta^{BC} \eta_{KD}) - \Lambda \quad (3.1.11)$$

<sup>4</sup>En realidad 4 vectores nuevos, solo que 2 son Left y 2 son Right

es el potencial escalar<sup>5</sup>. Los índices corren en el grupo que corresponde a la compactificación y se contraen con la  $\eta^{AB}$  usual de DFT.

$\mathcal{H}_{AB}$  es la métrica generalizada interna que codifica información acerca de los campos escalares.  $\mathcal{R}$  es el escalar de Ricci  $d$ -dimensional Ricci y  $F_{\mu\nu}^A$  y  $H_{\mu\nu\rho}$  son

$$\begin{aligned} F^B &= dA^B - \frac{1}{2\sqrt{2}} f_{CD}{}^B A^C \wedge A^D \\ H &= dB + F^C \wedge A_C - \frac{1}{3!\sqrt{2}} f_{ABC} A^A \wedge A^B \wedge A^C, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

los campos de gauge y el tensor de campo del  $B$ .

La derivada covariante de los escalares es

$$(D_\mu \mathcal{H})_{AB} = (\partial_\mu \mathcal{H})_{AB} + \frac{1}{\sqrt{2}} f^K{}_{LA} A_\mu^L \mathcal{H}_{KB} + \frac{1}{\sqrt{2}} f^K{}_{LB} A_\mu^L \mathcal{H}_{AK}. \quad (3.1.13)$$

Finalmente, las  $f_{ABC} = \eta_{AK} f^K{}_{BC}$  son constantes de estructura (o flujos) totalmente antisimétricas. Éstas se consiguen a partir de los vielbein generalizados internos  $E_A$  por medio de la derivada de Lie generalizada

$$[\mathcal{L}_{E_A} E_B]^M = \frac{1}{2} [E_A^P \partial_P E_B^M - E_B^P \partial_P E_A^M + \eta^{MN} \eta_{PQ} \partial_N E_A^P E_B^Q] \quad (3.1.14)$$

$$[E_I, E_J] = \mathcal{L}_{E_I} E_J = f_{IJ}{}^K E_K. \quad (3.1.15)$$

donde los  $f_{IJ}{}^K$  obtenidos, para las reducciones generalizadas tipo Scherk-Schwarz, deben ser constantes y satisfacer los siguientes vínculos

$$f_{IJK} \equiv \eta_{KL} f_{IJ}{}^L = f_{[IJK]}, \quad f_{[IJ}{}^L f_{K]L}{}^R = 0. \quad (3.1.16)$$

El objetivo es dar una manifestación explícita de los vielbein generalizados  $E_A$  que produzca los flujos necesarios para que la acción (4.1.7) quede con simetría  $SU(2) \times SU(2)$  en el caso del círculo. Luego comparar la acción con las amplitudes en cuerdas y verificar que su coincidencia.

¿Cómo encontrar  $E_A$ ? Primero notar que estamos en el círculo, por lo que el espacio doble interno físico sigue estando formado por solo dos coordenadas:  $\mathbb{Y} = (y, \tilde{y})$ <sup>6</sup>. Por otro lado, como hemos intuitido, el espacio tangente debe aumentarse a  $D = d+1+2$ . Es

<sup>5</sup>La constante  $\Lambda$  es una constante cosmológica en el espacio doble, su único papel es evitar que quede una en el espacio-tiempo proveniente de otros términos del potencial, por lo que es fijada para cancelar la misma.

<sup>6</sup>O sus equivalentes

$$\begin{aligned} y_{Lm} &= \frac{1}{2} [(g+B)_{mn} y^n + \tilde{y}_m] \\ y_{Rm} &= \frac{1}{2} [(g-B)_{mn} y^n - \tilde{y}_m] \end{aligned} \quad (3.1.17)$$



decir, el índice  $A$  toma solo 6 valores, 3 de los cuales son Left y otros 3 Right. A su vez, de los 3 Left (Right), uno es tipo Cartan y los otros dos son cargados. Los denotamos como  $A = (+, -, 3; \hat{+}, \hat{-}, \hat{3})$ , donde  $(+, -, 3;)$  son los Left siendo el último el Cartan, y  $(\hat{+}, \hat{-}, \hat{3})$  los correspondientes Right. Presentamos ahora el resultado para los vielbeins que en la base Cartan-Weyl toman la forma,

$$\begin{aligned} E_{\pm} &= c(e^{\mp i \frac{2}{\sqrt{\alpha'}} y_L}, i e^{\mp i \frac{2}{\sqrt{\alpha'}} y_L}, 0, 0, 0, 0), \quad E_3 = -c(0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ \bar{E}_{\pm} &= c(0, 0, 0, e^{\mp i \frac{2}{\sqrt{\alpha'}} y_R}, i e^{\mp i \frac{2}{\sqrt{\alpha'}} y_R}, 0) \quad \bar{E}_{\hat{3}} = -c(0, 0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Las direcciones  $E_{\pm} \equiv E_1 + iE_2$  (y  $\bar{E}_{\pm} \equiv E_{\hat{1}} + iE_{\hat{2}}$ ) codifican la extensión del espacio tangente. Es fácil ver que, usando (3.1.14) (poniendo  $c = i\sqrt{\alpha'}$ ) y notando que solo las direcciones que contribuyen a la derivada parcial son

$$\partial_A = (0, 0, \partial_{y_L}, 0, 0, \partial_{y_R}), \quad (3.1.19)$$

las constantes de estructura de  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  se obtienen. En la base Cartan-Weyl éstas se leen,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f_{+-}{}^3 &= \frac{1}{2}f_{\hat{+}\hat{-}}{}^{\hat{3}} = f_{3+}{}^{+} = f_{\hat{3}\hat{+}}{}^{\hat{+}} = -f_{3-}{}^{-} = -f_{\hat{3}\hat{-}}{}^{\hat{-}} = 1 \\ -\frac{1}{2}f_{\hat{+}\hat{-}}{}^3 &= -\frac{1}{2}f_{+-}{}^{\hat{3}} = f_{3\hat{+}}{}^{\hat{+}} = -f_{3\hat{-}}{}^{\hat{-}} = f_{\hat{3}+}{}^{+} = -f_{\hat{3}-}{}^{-} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Resta ahora ver que la acción (4.1.7) se reduce a aquella dada por las amplitudes en cuerdas. Primero que nada debemos decir como descomponer cada uno de los tensores con índices internos de  $\frac{O(3,3)}{O(3) \times O(3)}$ .

Como  $H$  cae en  $O(3,3)/O(3) \times O(3)$  se puede mostrar que [27, 28] puede ser expandida en fluctuaciones de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_C = \begin{pmatrix} 1_n + MM^T & M \\ M^T & 1_n + M^T M \end{pmatrix} + O(M^3) \quad (3.1.21)$$

donde  $M^{ij}$  son las fluctuaciones de la misma. La notación para las fluctuaciones no es casualidad, podemos ponerlas en correspondencia uno a uno con los escalares no-masivos del punto autodual explicados arriba. Lo mismo ocurre con los vectores  $A_{\mu}^B$ .

Al reemplazar en la acción (4.1.7) obtenemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa_d^2} \int d^d x \sqrt{g} e^{-2\varphi} \left( \mathcal{R} + 4\partial^{\mu} \varphi \partial_{\mu} \varphi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right) \\ &- \frac{1}{8} \left( \delta_{ij} F^{i\mu\nu} F_{\mu\nu}^j + \delta_{ij} \bar{F}^{i\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}^j - \frac{1}{2} g_d \sqrt{\alpha'} M_{ij} F_{\mu\nu}^i \bar{F}^{j\mu\nu} \right) \\ &- D_{\mu} M_{ij} D_{\nu} M^{ij} g^{\mu\nu} + \frac{16g_d}{\sqrt{\alpha'}} \det M + \mathcal{O}(M^4), \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

donde la segunda línea contiene el tensor de campo de los vectores de  $SU(2)_L$  y  $SU(2)_R$

(a los cuales denotamos con  $A_\mu^i, \bar{A}_\mu^i$  respectivamente). La matriz de escalares  $M_{ij}$  vive en la representación  $(\mathbf{3}, \mathbf{3})$  del grupo de simetría en cuestión, y las derivadas covariante por lo tanto son

$$D_\mu M_{ij} = \partial_\mu M_{ij} + g_d f_{li}^k A_\mu^l M_{kj} + g_d \bar{f}_{lj}^k \bar{A}_\mu^l M_{ik}$$

donde las  $f_{kli} = -\bar{f}_{kli}$  son las constantes de estructura del grupo (i.e. tensor de Levi-Chivita para este grupo) y la constante de acoplamiento es  $g_d = \kappa_d \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}$ .

Resulta (4.1.15) ser exactamente la acción efectiva de la cuerda sobre el punto autodual, es decir, reproduce todas las amplitudes de 3-puntos (ver [26]).

En resumen, este formalismo de vielbeins generalizados permite incluir en DFT la descripción el punto particular de aumento de simetría (sobre el círculo). Sin embargo, cerca del punto autodual, los estados son no-masivos pero lo suficientemente livianos como para tener que estar presentes en una teoría efectiva. Veremos ahora como utilizar el formalismo presentado en esta sección para lograr cubrir los alrededores de este (y otros en general) punto de aumento de simetría.

### 3.1.3. Mecanismo Higgs entorno a punto fijo

Analicemos ahora lo que sucede en los alrededores de un punto fijo. Tomemos como ejemplo el  $SU(2) \times SU(2)$  del círculo en el punto autodual. Las masas de los estados con winding y/o momento interno que se vuelven no-masivos en el radio autodual son

- $m_-^2 = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\bar{R}}\right)^2$  para los vectores  $A_\mu^\pm, \bar{A}_\mu^\pm$  y escalares  $M^{\pm 3}, M^{3\pm}$ .
- $m_{\pm\pm}^2 = \frac{4}{R} m_-$  para los escalares  $M^{\pm\pm}$ .
- $m_{\pm\mp}^2 = -\frac{4}{R} m_-$  para los escalares  $M^{\pm\mp}$ .

Como fue mencionado arriba, cuando  $R \rightarrow \alpha'$  resulta  $m_- \rightarrow 0$  y por lo tanto las masas de estos estados se vuelven muy livianas y deben ser incluidas en la teoría efectiva. El formalismo de la anterior sección solo nos permite incluir el punto autodual, pero no el entorno. Veamos ahora como generalizarlo para incluir esta situación.

La construcción de los vielbeins generalizados fue inspirada en la estructura de los operadores de vértice de la cuerda. La correspondencia la podemos ver a continuación

$$\bar{E}^\pm \sim e^{\mp \frac{2i}{\sqrt{\alpha'}} y^R} \leftrightarrow e^{\mp \frac{2i}{\sqrt{\alpha'}} y^R(\bar{z})} d\bar{z} = \bar{J}^\mp d\bar{z}, \quad (3.1.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}^3 &\sim dy^R \leftrightarrow dy^R(\bar{z}) = \bar{J}^3 d\bar{z} \\ E^\pm &\sim e^{\mp \frac{2i}{\sqrt{\alpha'}} y^L} \leftrightarrow e^{\mp \frac{2i}{\sqrt{\alpha'}} y^L(z)} dz = J^\mp dz, \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

$$E^3 \sim dy^L \leftrightarrow dy^L(z) = J^3 dz.$$

Es decir, es como si las corrientes  $J^\pm$  fuesen una dirección<sup>7</sup> además de la  $J^3$ .

<sup>7</sup>Veremos en el Capítulo 5 que esto está relacionado de alguna manera con la descomposición de

Siguiendo esta misma idea, podríamos ver a que nos conduce para radios de compactificación genéricos  $R$ . La información de los mismos viene codificada en los operadores de vértice a través del siguiente factor esponencial

$$: \exp[ik_L y_L(z) + ik_R y_R(\bar{z})] e^{iK \cdot X} : \quad (3.1.25)$$

donde

$$k_L^{(p,\bar{p})} = \frac{p}{R} + \frac{\bar{p}}{\bar{R}}, \quad k_R^{(p,\bar{p})} = \frac{p}{R} - \frac{\bar{p}}{\bar{R}}. \quad (3.1.26)$$

El caso particular del aumento de simetría se corresponde a cuando  $k_R = 0$  y  $k_L = \pm \frac{2}{\alpha'}$ , o cuando  $k_L = 0$  y  $k_R = \pm \frac{2}{\alpha'}$ , y los vértices se separan en tipo Left y tipo Right respectivamente. Al moverse fuera del punto fijo, los tipo Left adquieren una parte Right, y viceversa. La forma natural de generalizar sería incluir la dependencia en  $k_L y_L + k_R y_R$  en los vielbein exactamente en el lugar en la que ya aparecía: Notar que los vielbein generalizados propuestos para describir el aumento de simetría ya tienen la dependencia pero ésta se encuentra evaluada en el punto fijo.

Por lo tanto proponemos

$$\begin{aligned} E_{\pm} &= c(e^{\mp i w}, \pm i e^{\mp i w}, 0, 0, 0, 0) & \bar{E}_{\pm} &= c(0, 0, 0, e^{\mp i \bar{w}}, \pm i e^{\mp i \bar{w}}, 0) \\ E_3 &= -c(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) & \bar{E}_3 &= -c(0, 0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

donde

$$w = m_+ y_L + m_- y_R, \quad \bar{w} = m_- y_L + m_+ y_R \quad (3.1.28)$$

y  $m_{\pm} = k_R^{(1,\pm 1)} = \frac{1}{R} \pm \frac{1}{\bar{R}}$ . Notar que  $m_+ \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\alpha'}}$  sobre el radio autodual  $R = \tilde{R} = \sqrt{\alpha'}$ , recuperando así los vielbeins propuestos para describir el aumento de simetría.

Analicemos ahora las consecuencias de proponer estos vielbeins. Primero, usando (3.1.14) se computan los flujos obteniendose

$$\begin{aligned} [E_+, E_-] &= 2(a_+ E_3 - a_- \bar{E}_3), & [E_{\hat{+}}, \bar{E}_{\hat{-}}] &= 2(a_+ \bar{E}_3 - a_- E_3), \\ [E_3, E_+] &= a_+ E_+, & [\bar{E}_3, \bar{E}_{\hat{+}}] &= a_+ \bar{E}_{\hat{+}} \\ [E_3, E_-] &= -a_+ E_-, & [E_3, \bar{E}_{\hat{-}}] &= -a_+ \bar{E}_{\hat{-}} \\ [\bar{E}_3, E_+] &= a_- E_+, & [E_3, \bar{E}_{\hat{+}}] &= a_- E_{\hat{+}} \\ [\bar{E}_3, E_-] &= -a_- E_-, & [E_3, \bar{E}_{\hat{-}}] &= -a_- \bar{E}_{\hat{-}} \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

donde

$$a_{\pm} = \frac{\sqrt{\alpha'} m_{\pm}}{2}. \quad (3.1.30)$$

Es importante señalar que llamarlos “flujos” es correcto, pues estos valores encontra-

---

Kaluza-Klein, en la cual es espacio geométrico siempre es finito pero los grados de libertad asociados son infinitas, i.e. el espacio vectorial es de dimensión infinita, grosso modo una dirección por cada modo de Fourier.

dos satisfacen todos los vínculos cuadráticos que surgen de las compactificaciones tipo Scherk-Schwarz, a saber, los mencionados en (3.1.16). Este hecho es altamente no-trivial y sugiere que la propuesta de vielbein generalizado está bien encaminada.

Notar que, si  $R \rightarrow \tilde{R}$  entonces  $(a_-, a_+) \rightarrow (0, 1)$  y se recupera el álgebra  $SU(2) \times SU(2)$ . Más aún, es fácil chequear que esta álgebra es invariante ante la transformación de T-dualidad, i. e. ante  $R \leftrightarrow \tilde{R}$ .

Volveremos sobre el análisis de esta álgebra más adelante. Veamos ahora la acción que se deriva de ella. Insertando los flujos en (4.1.7) obtenemos la siguiente acción

$$\begin{aligned}
S_{R \neq \tilde{R}} = & \int d^d x \sqrt{g} e^{-2\varphi} \left[ \frac{1}{2\kappa_d^2} (\mathcal{R} + 4(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}) \right. \\
& - \frac{1}{8} F_{\mu\nu}^3 F^{\mu\nu 3} - \frac{1}{8} \bar{F}_{\mu\nu}^3 \bar{F}^{\mu\nu 3} \\
& - \frac{1}{8} F_{\mu\nu}^{\prime +} F^{\prime \mu\nu -} - \frac{1}{4} m_-^2 A'_\mu A'_\nu g^{\mu\nu} - \frac{1}{8} \bar{F}_{\mu\nu}^{\prime +} \bar{F}^{\prime \mu\nu -} - \frac{1}{4} m_-^2 \bar{A}'_\mu \bar{A}'_\nu g^{\mu\nu} \\
& - \partial_\mu M_{33} \partial^\mu M_{33} - \frac{1}{2} D_\mu M_{\pm\pm} D^\mu M_{\mp\mp} - \frac{1}{2} D_\mu M_{\pm\mp} D^\mu M_{\mp\pm} \\
& + ig_d \frac{\sqrt{\alpha'} m_+}{2} A'^{+\mu} A'^{-\nu} F_{\mu\nu}^3 + ig_d \frac{\sqrt{\alpha'} m_-}{2} A'^{+\mu} A'^{-\nu} \bar{F}_{\mu\nu}^3 \\
& + ig_d \frac{\sqrt{\alpha'} m_+}{2} \bar{A}'^{+\mu} \bar{A}'^{-\nu} \bar{F}_{\mu\nu}^3 + ig_d \frac{\sqrt{\alpha'} m_-}{2} \bar{A}'^{+\mu} \bar{A}'^{-\nu} F_{\mu\nu}^3 \\
& + g_d \frac{m_+ \sqrt{\alpha'}}{2} A'^{+\mu} A'_\mu M_{33} m_- + g_d \frac{m_+ \sqrt{\alpha'}}{2} \bar{A}'^{+\mu} \bar{A}'_\mu M_{33} m_- \\
& - g_d \sqrt{\alpha'} \frac{1}{8} F_{\mu\nu}^{\prime \pm} \bar{F}^{\prime \pm \mu\nu} M_{\mp\mp} - g_d \sqrt{\alpha'} \frac{1}{8} F_{\mu\nu}^{\prime \pm} \bar{F}^{\prime \mp \mu\nu} M_{\mp\pm} - g_d \sqrt{\alpha'} \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^3 \bar{F}^{3\mu\nu} M_{33} \\
& - \frac{4g_d}{\sqrt{\alpha'}} M_{+-} M_{-+} M_{33} \left( \frac{\sqrt{\alpha'}}{\tilde{R}} \right)^2 + \frac{4g_d}{\sqrt{\alpha'}} M_{++} M_{--} M_{33} \left( \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} \right)^2 \\
& + \left. \frac{4m_-}{\tilde{R}} \frac{1}{2} M_{+-} M_{-+} - \frac{4m_-}{R} \frac{1}{2} M_{++} M_{--} \right]
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

donde ahora

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^{\prime \pm} &= 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^{\prime \pm} \mp ig_d \frac{\sqrt{\alpha'} m_+}{2} 2A_{[\mu}^3 A_{\nu]}^{\prime \pm} \mp ig_d \frac{\sqrt{\alpha'} m_-}{2} 2\bar{A}_{[\mu}^3 A_{\nu]}^{\prime \pm} \\
\bar{F}_{\mu\nu}^{\prime \pm} &= 2\partial_{[\mu} \bar{A}_{\nu]}^{\prime \pm} \mp ig_d \frac{\sqrt{\alpha'} m_+}{2} 2\bar{A}_{[\mu}^3 \bar{A}_{\nu]}^{\prime \pm} \mp ig_d \frac{\sqrt{\alpha'} m_-}{2} 2A_{[\mu}^3 \bar{A}_{\nu]}^{\prime \pm} \\
F_{\mu\nu}^3 &= 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^3
\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

$$\begin{aligned}
D_\mu M_{\pm\pm} &= [\partial_\mu + i(\pm)g_d \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} A_\mu^3 + i(\pm)g_d \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} \bar{A}_\mu^3] M_{\pm\pm} \\
D_\mu M_{\pm\mp} &= [\partial_\mu + i(\pm)g_d \frac{\sqrt{\alpha'}}{\tilde{R}} A_\mu^3 - i(\pm)g_d \frac{\sqrt{\alpha'}}{\tilde{R}} \bar{A}_\mu^3] M_{\pm\mp}
\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

Esta es *exactamente* la acción efectiva de la cuerda construida a partir de amplitudes de 3-puntos (ver [26]). Es importante resaltar que todos los factores dan perfectamente, es decir, su dependencia funcional con el radio  $R$  es exacta<sup>8</sup>. La simetría  $U(1) \times U(1)$

<sup>8</sup>Notar que esto es altamente no trivial. Como se discute en [26], esta acción podría obtenerse de

es explícita (derivadas covariantes+masa de los estados). Los campos aparecen incluso con los términos de masa adecuados.

Los campos  $M^{\pm 3}$  y  $M^{3\pm}$  han desaparecido de la acción. Esto es análogo a lo que sucedió en el capítulo anterior para ciertos modos masivos: Se convierten en g.d.l. tipo Goldstone. Sus operadores de vértice en cuerdas son anómalos fuera del radio autodual y no representan campos físicos. Más bien, son absorbidos por los vectores que tienen sus mismos números cuánticos,  $A_\mu^\pm, \bar{A}_\mu^\pm$  obteniendo así la cantidad de g.d.l. de un vector masivo. En la acción esto ocurre explícitamente al absorber el campo  $\partial_\mu M^{\pm 3}$  (y  $\partial_\mu M^{3\pm}$ ) y por esto han quedado denotados los vectores masivos con una “prima” en la acción obtenida.

Resulta instructivo ver como alguno de estos términos aparecen durante la ruptura: Al insertar la expansión en la fluctuaciones escalares  $M$  de la matriz escalar (3.1.21) a la tercer fila de la acción (4.1.7) y usando los valores de las constantes de estructura encontradas vemos que los términos cuadráticos que provienen de allí son

$$\begin{aligned} & 2(m_+m_- + m_-^2)|M^{\pm\pm}|^2 - 2(m_+m_- - m_-^2)|M^{\pm\mp}|^2 \\ &= \frac{4}{R}m_-|M^{\pm\pm}|^2 - \frac{4}{R}m_-|M^{\pm\mp}|^2 \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

reproduciendo los valores exactos de las masas  $m_{\pm\pm}^2 = \frac{4}{R}m_-$  y  $m_{\pm\mp}^2 = -\frac{4}{R}m_-$ . Los términos proporcionales a  $m_+m_-$  y  $m_-^2$  provienen de términos lineales y cuadráticos en la expansión en  $M$  respectivamente.

De la misma fila en (4.1.7) para términos cúbicos en  $M$  se obtiene el potencial escalar

$$- \frac{4}{\sqrt{\alpha'}} M_{+-} M_{-+} M_{33} \left( \frac{\sqrt{\alpha'}}{\tilde{R}} \right)^2 + \frac{4}{\sqrt{\alpha'}} M_{++} M_{--} M_{33} \left( \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} \right)^2 \quad (3.1.35)$$

con  $m_+^2 + m_-^2 + 2m_+m_- = (m_+ + m_-)^2 = \frac{4}{R^2}$ . Siguiendo así se obtiene el resto de los términos que aparecen en la acción.

En conclusión, esta generalización de los vielbein permite dar una descripción efectiva, en el lenguaje de DFT, de la cuerda entorno al punto de aumento de simetría, incluido tanto el punto como la cercanía del mismo de forma exacta. Discutiremos en lo que resta del Capítulo si este formalismo puede extenderse en general a todos los puntos de aumento de simetría en las compactificaciones toroidales de la cuerda.

Para finalizar esta sección terminemos de discutir las propiedades de los flujos encontrados en (3.1.29). Como mencionamos satisfacen todos los vínculos cuadráticos que surgen de las compactificaciones Scherk-Schwarz. Al satisfacer la identidad de Jacobi debe, por lo tanto, corresponderse con una de las álgebras, semisimples conocidas.

---

la ruptura espontánea de (4.1.15) al darle a  $M^{33}$  un vev  $\nu$ . Sin embargo, la acción obtenida es válida solo para valores pequeños de  $\nu$ . Esto se manifiesta en que la dependencia en  $R$  de los factores no resulta exacta. Por lo tanto, esta construcción presentada aquí a partir de los vielbein generalizados parece ser lo suficientemente fuerte como para reproducirlos.

Es fácil intuir, que muy probablemente se trate de  $SU(2) \times SU(2)$  por el número de generadores. Mostremos esto explícitamente, al realizar las siguientes combinaciones lineales

$$\begin{aligned} E'_\pm &= E_\pm; & \bar{E}'_\pm &= \bar{E}_\pm \\ E'_3 &= a_+ E_3 - a_- \bar{E}_3 \\ E'_3 &= -a_- E_3 + a_+ \bar{E}_3. \end{aligned} \tag{3.1.36}$$

En términos de los generadores primados, el álgebra de  $SU(2) \times SU(2)$  en la base Cartan-Weyl se obtiene en su expresión standard. Es curioso notar que la combinación lineal mostrada es una rotación de  $O(3, 3)$ , matricialmente es

$$\begin{pmatrix} 1_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_+ & 0 & -a_- \\ 0 & 0 & 1_2 & 0 \\ 0 & -a_- & 0 & a_+ \end{pmatrix} \tag{3.1.37}$$

donde para ver que es un elemento del grupo hay que usar que  $a_+^2 - a_-^2 = 1$ .

En conclusión, vemos que incluso en la fase rota, todavía existe una simetría  $SU(2)$  subyacente (la cual mezcla estados masivos con no masivos). Sin embargo, una vez que los vielbein son elegidos, la simetría  $O(3, 3)$  está rota y, por lo tanto, no puede realizarse la rotación recién mostrada para llevar la acción al punto original. El hecho de que los flujos reescriban un  $SU(2) \times SU(2)$  y que la acción no tenga esta simetría no es incompatible. La razón es que el background de la métrica generalizada, el cual es compatible con la compactificación toroidal hecha, produce esta ruptura en el Lagrangiano.

## 3.2. Aumento de Simetría en Compactificaciones Toroidales Generales

Discutiremos en esta sección posibles realizaciones de este mecanismo de aumento/ruptura de simetría, a través de flujos dependiente de los módulos, para compactificaciones toroidales generales. La compactificación de la cuerda bosónica en un toro  $T^r$  de  $r$  dimensiones da lugar a grupos de simetría  $G \times G$  de rango  $2r$  ( $r$  provenientes de los vectores Left y  $r$  de vectores Right asociados a la compactificación de la métrica y el campo  $B$ ). En un punto general del espacio de módulos el grupo es, como ya hemos visto en el Capítulo 2, simplemente un  $U(1)^r \times U(1)^r$ , pero en puntos especiales  $G$  es un grupo no-Abeliano con  $\dim(G) = n = n_c + r$ . Con  $n_c$  se cuenta el número de generadores cargados asociados a la presencia de valores no triviales de momento KK y winding.

Si razonamos de la misma manera que en el caso del círculo, diríamos que los grados de libertad del sector no masivo viene codificados en un  $\frac{O(d+n, d+n)}{O(d+n) \times O(d+n)}$ . La cantidad de

g.d.l. viene dada por

$$\dim\left(\frac{O(d+n, d+n)}{O(d+n) \times O(d+n)}\right) = d^2 + 2nd + n^2 \quad (3.2.1)$$

la cual parece corresponderse con  $d^2$  del sector gravitatorio completo, los  $2n$  vectores del  $G \times G$  y  $n^2$  escalares en la representación bi-adjunta (cuando  $n = r$  obtenemos el caso Abelian usual). Es muy fácil ver desde cuerdas que los grados de libertad serán exactamente estos. Cuando el aumento de simetría aparece, los vectores no-masivos tienen en sus operadores de vértice corrientes  $J^i$  (y  $\bar{J}^i$ ) que cierran el álgebra en cuestión via OPEs. Cuando éstas son Cartanes se trata de corrientes  $\partial Y^a$  con  $a = 1, \dots, r$  (idem para las corrientes Right). Cuando son cargadas se trata de  $e^{i\mathbb{P} \cdot \mathbb{Y}}$ . Los escalares que resulten no-masivos solo podrán ser construídos a partir de combinaciones de estas corrientes. Teniendo un total de  $n$  corrientes, quedan  $n^2$  posibles escalares.

Ejemplos de otros aumentos de simetría son: Para el toro  $T^2$ , cuando  $n = 6$  el número de g.d.l. no-masivos se corresponde con un  $SU(2)_L \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_R$  con escalares en la  $(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) + (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) + (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$ . Cuando  $n = 8$  se obtiene el máximo aumento posible y el grupo resulta en un  $SU(3) \times SU(3)$  con escalares en la  $(\mathbf{8}, \mathbf{8})$ .

### 3.2.1. Construcción de los Flujos Generalizados

Veremos ahora como construir en general los flujos dependientes de los módulos en el caso general, no obstante dejamos para el Apéndice la construcción de los vielbeins generalizados para el caso del  $SU(2)_L \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_R$  solo como ejemplo ilustrativo.

Primero vale recordar la notación usada generalmente en cuerdas: Al compactificar en Toros los momentos internos, tanto Left como Right, se escriben en términos de los winding, momento KK y los módulos. Más precisamente, si denotamos por  $k_L^a, k_R^a$  los correspondientes Left y Right, entonces tenemos que

$$k_L^a = e_m^a p_L^m, \quad k_R^a = e_m^a p_R^m$$

donde

$$p_L^m = \tilde{p}^m + g^{mn}(p_n - B_{nk}\tilde{p}^k), \quad p_R^m = -\tilde{p}^m + g^{mn}(p_n - B_{nk}\tilde{p}^k), \quad (3.2.2)$$

y  $g_{mn} = e_m^a e_n^a$  es la métrica interna mientras que  $B_{mn}$  es el background interno del campo Kalb-Ramond. Los  $e_m^a$  son los vectores de la red interna que define el Toro. Dado un punto genérico definido con las direcciones internas  $e_m^a(g, B)$  dependientes de los módulos, tendremos que también los momentos internos dependen de éstos, por lo que los denotaremos  $k_L^{\mathbb{P}}(g, B)$  y  $k_R^{\mathbb{P}}(g, B)$  (donde de paso mostramos la dependencia explícita en winding y momento a través de  $\mathbb{P}$ )

En rigor, el uso de los vielbein generalizados es un mero formalismo que nos conduce a la acción (4.1.7), la cual queda escrita en términos de los flujos (que a su vez están definidos en términos de los vielbein). Podríamos hacernos la siguiente pregunta: Si encontramos una manera de dar explícitamente los  $f_{ABC}$  dependientes de los módulos, que satisfagan los vínculos cuadráticos y den como resultado la acción efectiva correcta, ¿es necesario dar los vielbein? Para responder esto indagemos un poco más en cuerdas. Las constantes de estructura del grupo de simetría se leen directamente en cuerdas de las amplitudes de 3-puntos entre vectores no-masivos. Más precisamente, solo la parte de las corrientes es la que contribuye.

En un punto fijo dado por  $(g_0, B_0)$ , resulta para ciertos valores de  $\mathbb{P}$  que  $k_L^{\mathbb{P}}(g_0, B_0) = \alpha^{\mathbb{P}}$  y  $k_R^{\mathbb{P}}(g_0, B_0) = 0$ , donde  $\alpha$  es una raíz simple del grupo de simetría de gauge aumentado<sup>9</sup>. El supraíndice  $\mathbb{P}$  indica a partir de qué valores de momento KK y winding es construída la raíz. Los estados construídos con estos valores tienen operadores de vértice con la corriente proporcional a  $e^{i\alpha^{\mathbb{P}} \cdot y_L}$  (idem para los tipo Right), es decir, son los “cargados”. La corriente de los tipo Cartan es indiferente al background ya que resulta simplemente  $\partial Y^I$  (idem para Cartanes Right).

Con un abuso de notación podríamos denotar a las corrientes cargadas con  $J^{\mathbb{P}} = e^{i\alpha^{\mathbb{P}} \cdot y_L}$  (idem con las Right)<sup>10</sup>, ya que solo con la información de  $\mathbb{P}$  podemos construirlas (hay una biyección entre las raíces  $\alpha$  y los valores posibles de  $\mathbb{P}$  que dan lugar a estados no-masivos). Si además denotamos las corrientes Cartan con  $J^I = \partial Y^I$ , e interpretamos los índices del grupo de gauge en las constantes de estructura  $f_{abc}$  de la siguiente manera:

- si  $a = \alpha = \alpha^{\mathbb{P}} \equiv \mathbb{P}$
- sino,  $a = I$

podemos afirmar, de cuerdas, que las  $f_{abc}$  satisfacen

$$f_{abc} \propto \langle J^a J^b J^c \rangle \quad (3.2.3)$$

donde el factor de proporcionalidad es una potencia de  $z$  (y lo mismo para las Right). Esto es así, como ya mencionamos, debido a que exactamente esta amplitud es la que aparece en cuerdas cuando se calcula el scattering entre 3 vectores no-masivos (la amplitud de los mismos es proporcional a (3.2.3)).

Lo curioso de esta forma de abordar la definición de las constantes es que permite definir las *fuera* del punto fijo, ya que la amplitud sigue existiendo. Cuando nos apartamos de punto en cuestión, las  $J^{\mathbb{P}} = e^{i\mathbb{P} \cdot Y} = e^{ik_L \cdot y_L + ik_R \cdot y_R}$  adquieren una componente Right (y las correspondientes Right adquieren una componente Left).

Por lo tanto, podemos ahora introducir el índice doble  $A = (a, \bar{a})$ , el cual puede ser Left ( $a$ ) o Right ( $\bar{a}$ ), donde a su vez,  $a = (\mathbb{P}, I)$  (idem con  $\bar{a}$ ) y definir los flujos  $f_{ABC}$  *fuera*

<sup>9</sup>También, para otros valores de  $\mathbb{P}$  ocurre lo mismo intercambiando Left y Right y por esto el grupo de simetría siempre resulta de la forma  $G_L \times G_R = G \times G$ .

<sup>10</sup>Notar que  $J^{\mathbb{P}} = e^{i\mathbb{P} \cdot Y} = e^{i\alpha^{\mathbb{P}} \cdot y_L}$



del punto fijo, generalizando (3.2.3), mediante

$$f^{ABC} \propto \langle J^A J^B J^C \rangle. \quad (3.2.4)$$

Por ejemplo, si tomamos tres corrientes cargadas  $J^{\mathbb{P}_i}$ , con  $i = 1, 2, 3$  obtenemos

$$\langle J^{\mathbb{P}_1} J^{\mathbb{P}_2} J^{\mathbb{P}_3} \rangle \propto f_{\alpha(\mathbb{P}_2)\alpha(\mathbb{P}_2)\alpha(\mathbb{P}_3)}(g, B) \quad (3.2.5)$$

donde  $f_{\alpha(\mathbb{P}_2)\alpha(\mathbb{P}_2)\alpha(\mathbb{P}_3)}(g, B) \equiv 1$  si  $\mathbb{P}_3 = -\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2$  y se anula en cualquier otro caso debido a la conservación de momento.

Con esto presente, en un punto genérico del espacio de módulos, la siguiente álgebra es obtenida a partir de los flujos

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= k_L^{(\alpha)I} H_I + k_R^{(\alpha)\hat{I}} \hat{H}_{\hat{I}} & [\hat{E}_{\hat{\alpha}}, \hat{E}_{-\hat{\alpha}}] &= k_L^{(\hat{\alpha})I} H_I + k_R^{(\hat{\alpha})\hat{I}} \hat{H}_{\hat{I}} \\ [H_I, E_\alpha] &= k_L^{(\alpha)I} E_\alpha & [\hat{H}_{\hat{I}}, \hat{E}_{\hat{\alpha}}] &= k_R^{(\hat{\alpha})\hat{I}} \hat{E}_{\hat{\alpha}} \\ [H_I, \hat{E}_{\hat{\alpha}}] &= k_L^{(\hat{\alpha})I} \hat{E}_{\hat{\alpha}} & [\hat{H}_{\hat{I}}, E_\alpha] &= k_R^{(\alpha)I} E_\alpha \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

donde volvimos a usar la notación  $\alpha = \alpha^{(\mathbb{P})}$  para abreviar. Es decir, los posibles valores de  $f_{ABC}$  no nulos son

- $f_{\alpha(\mathbb{P}_2)\alpha(\mathbb{P}_2)\alpha(\mathbb{P}_3)}(g, B) \equiv 1$  si  $\mathbb{P}_3 = -\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2$ .
- $f_{\alpha(\mathbb{P})\alpha(-P)I}(g, B) = k_L^{(\mathbb{P})}(g, B)_{I_L}$
- $f_{\hat{\alpha}(\mathbb{P})\hat{\alpha}(-P)\hat{I}}(g, B) = k_R^{(\mathbb{P})}(g, B)_{I_R}$
- $f_{\alpha(\mathbb{P})\alpha(-P)\hat{I}}(g, B) = k_L^{(\mathbb{P})}(g, B)_{I_R}$
- $f_{\hat{\alpha}(\mathbb{P})\hat{\alpha}(-P)I}(g, B) = k_R^{(\mathbb{P})}(g, B)_{I_L}$

Nuevamente, es fácil ver que esta álgebra satisface Jacobi y todos los vínculos cuadráticos ya mencionados. Sobre un punto fijo, donde  $k_R^\alpha(g_0, B_0) = k_L^{\hat{\alpha}}(g_0, B_0) = 0$  y  $f_{\alpha-\alpha I} = \alpha^I$ , (y similar para el sector Right) el álgebra se reduce al álgebra de gauge  $G_L \times G_R$  en la base Cartan-Weyl.

Al introducir estos flujos en el Lagrangiano (4.1.7), se obtiene la acción efectiva de la cuerda entorno al punto autodual en cuestión, *sea cual sea* dicho punto. Mostremos por ejemplo, como aparecen exactamente los términos de masa de vectores y escalares. Primero separemos el índice doble en partes Left y Right,  $A = (a, \hat{a})$ . Luego, cada parte descompongamosla en índices cargados (raíces del grupo) y Cartanes,  $a = (\alpha, I)$ .

### Masa de Vectores

Los términos de masa de los vectores provienen de aquellos términos en (4.1.7) que al desarrollar en fluctuaciones de los campos den lugar a contribuciones cuadráticas en los

vectores. Estos son

$$\begin{aligned} (f_{ABC}A_\mu^B M_D^C + f_{DBC}A_\mu^B M_A^C)^2 &\sim A_\mu^B A^{E\mu} f_{ABC} f_{DEF} (\eta^{AD} \eta^{CF} - \delta^{AD} \delta^{CF}) \\ &\sim A_\mu^B A^{E\mu} f_{aB\hat{c}} f_{aE\hat{c}} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Si los flujos no mezclan sector Left y Right (como de hecho ocurre en el punto de aumento de simetría) resultarían todos los vectores no-masivos. De la conservación de momento sabemos que  $f_{aI\hat{c}} = f_{a\bar{I}\hat{c}} = 0$ . Más aún  $a$  y  $\hat{c}$  no pueden ser índices cargados simultáneamente. Luego

$$f_{aB\hat{c}} f_{aE\hat{c}} = f_{IB\hat{\gamma}} f_{IE\hat{\gamma}} + f_{\alpha B\hat{I}} f_{\alpha E\hat{I}} \quad (3.2.8)$$

Concluimos que los índices  $B, E$  en la anterior expresión deben ser cargados y, más aún, por la conservación de momento deben ser iguales.

$$\begin{aligned} A_\mu^B A^{E\mu} f_{aB\hat{c}} f_{aE\hat{c}} &\sim \sum_{\hat{\gamma}} A_\mu^{\hat{\gamma}} A^{\hat{\gamma}\mu} \sum_{I=1}^r f_{I-\hat{\gamma}\hat{\gamma}} f_{I-\hat{\gamma}\hat{\gamma}} + \sum_{\alpha} A_\mu^{\alpha} A^{\alpha\mu} \sum_{\hat{I}=1}^r f_{\alpha-\alpha\hat{I}} f_{\alpha-\alpha\hat{I}} \\ &= \sum_{\hat{\gamma}} A_\mu^{\hat{\gamma}} A^{\hat{\gamma}\mu} m_{\hat{\gamma}}^2 + \sum_{\alpha} A_\mu^{\alpha} A^{\alpha\mu} m_{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

donde la suma corre sobre las raíces positivas. Usando que  $f_{I-\hat{\gamma}\hat{\gamma}} = K_{L,\hat{\gamma}}^I$  i.e. la I-componente del momento Left (cuya contraparte Right se reduce a la raíz  $\gamma$  sobre el autodual) y similar para el caso Right. Podemos escribir las masas (usando fórmula de masa de la cuerda) como  $m_{\hat{\gamma}}^2 = \sum_{I=1}^r (K_{L,\hat{\gamma}}^I)^2$  para los estados cuyo momento Right se reduce a la raíz  $\hat{\gamma}$  en el autodual, y  $m_{\gamma}^2 = \sum_{I=1}^r (K_{R,\gamma}^I)^2$ , para los estados cuyo momento Left se reduce a la raíz  $\gamma$  en el autodual

## Masas de Escalares

Las masas de los escalares son un poco más complicadas ya que éstos pueden transformar en distintas representaciones del grupo aumentado en el punto autodual. Para aquellos escalares que estén cargados ante el grupo Left y el Right (son exactamente  $(\dim G - r)^2$ ), denotemos sus masas con  $M^{\alpha\hat{\beta}}$ . en cuerdas serían aquellos descriptos con los vértices  $V^{\alpha\hat{\beta}}(z, \bar{z}) \propto J^\alpha(z) \hat{J}^{\hat{\beta}}(\bar{z})$  con  $J^\alpha(z) = e^{k_{L\alpha} \cdot y}$ . Al moverse fuera del punto autodual una contribución Right no-nula  $k_{R\alpha}$  ( $m_-$  en el ajemplo del círculo) aparece y, análogamente, una  $k_{L\hat{\beta}}$ , para el sector Right. Por lo tanto, los momentos internos netos Left y Right fuera del autodual se convierten en

$$\begin{aligned} k_{L\alpha\hat{\beta}} &= k_{L\alpha} + k_{L\hat{\beta}} \\ k_{R\hat{\beta}\alpha} &= k_{R\hat{\beta}} + k_{R\alpha} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Recordar que al ser  $N = \bar{N} = 0$ , la condición LMC impone  $k_{L\alpha\hat{\beta}}^2 = k_{R\hat{\beta}\alpha}^2$ .

La masa de estos escalares resulta, de la fórmula de masa,

$$M_{\alpha\hat{\beta}}^2 = \frac{1}{2}k_{L\alpha\hat{\beta}}^2 + \frac{1}{2}k_{R\hat{\beta}\alpha}^2 - 4 \quad (3.2.11)$$

Reemplazando los valores (3.2.11) en esta fórmula y usando LMC para las corrientes de los vectores

$$\begin{aligned} k_{L\alpha}^2 - k_{R\alpha}^2 &= 1 \\ k_{L\hat{\beta}}^2 - k_{R\hat{\beta}}^2 &= -1 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

obtenemos

$$M_{\alpha\hat{\beta}}^2 = k_{R\alpha} \cdot (k_{R\alpha} + k_{R\hat{\beta}}) + k_{L\hat{\beta}} \cdot (k_{L\hat{\beta}} + k_{L\alpha}) \quad (3.2.13)$$

que, como es esperado, se anula en el punto fijo. Usando la identificación entre los flujos y los momentos esta expresión puede reescribirse como

$$M_{\alpha\hat{\beta}}^2 = f_{\hat{I}\alpha-\alpha}(f_{\hat{I}\alpha-\alpha} + f_{\hat{I}\hat{\beta}-\hat{\beta}}) + f_{\hat{I}\hat{\beta}-\hat{\beta}}(f_{\hat{I}\hat{\beta}-\hat{\beta}} + f_{\hat{I}\alpha-\alpha}) \quad (3.2.14)$$

Esta es *exactamente* la combinación de flujos que aparece frente a los términos cuadráticos de estos escalares. Es decir, al insertar la expansión en fluctuaciones de escalares  $M$  (3.1.21) en (5.4.21), quedarse con los términos cuadráticos en tales fluctuaciones, expandir los índices dobles y por último, quedarse con los términos cuadráticos que contengan a estos escalares, se observa que la combinación que queda para la masa es la expresión mostrada arriba.

### 3.2.2. El Álgebra de los Flujos

Como hemos mencionado, la elección de los flujos (4.1.20) que hemos realizado reproduce cualquier punto de aumento de simetría posible, es decir, al reemplazarlos en el Lagrangiano (4.1.7) dan lugar a la teoría efectiva de los grados de libertad involucrados. Vale recordar, que también se cubre la zona alrededor del punto fijo en cuestión. Es decir, se genera una suerte de mecanismo de aumento/ruptura de simetría al ir moviendo los módulos que figuran en los flujos.

Sobre los puntos fijos (4.1.20) se reduce al álgebra, en la base Cartan-Weyl, del grupo de simetría aumentado. Por otro lado, fuera del autodual también satisface Jacobi por lo que debe resultar un álgebra conocida. Al igual que el caso del círculo, resulta que el álgebra siempre es la misma, como probaremos a continuación.

Definamos el generador Cartan doble  $\mathbb{H}_{\mathcal{I}} = (H_I, \hat{H}_{\hat{I}})$ , y recordemos que el momento interno doble puede expresarse en la base Left-Right como  $\mathbb{K}^{\mathcal{I}} = (K_L^I, K_R^{\hat{I}})$ . Luego

(4.1.20) se puede reescribir

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \mathbb{K}_\alpha^\mathcal{I} \mathbb{H}_\mathcal{I} & [\hat{E}_{\hat{\alpha}}, \hat{E}_{-\hat{\alpha}}] &= \mathbb{K}_{\hat{\alpha}}^\mathcal{I} \mathbb{H}_\mathcal{I} \\ [\mathbb{H}_\mathcal{I}, E_\alpha] &= \mathbb{K}_\alpha^\mathcal{I} E_\alpha & [\mathbb{H}_\mathcal{I}, \hat{E}_{\hat{\alpha}}] &= \mathbb{K}_{\hat{\alpha}}^\mathcal{I} \hat{E}_{\hat{\alpha}} \end{aligned}$$

donde la dependencia en los módulos  $g, B$  viene a través de los  $\mathbb{K}$ 's. Al igual que sucede en las exponenciales de los operadores de vértice, podemos quitarle la dependencia en los módulos a los momentos y trasladarsela a los  $H$ 's (en los vértices esto redefine las coordenadas internas Left y Right en términos de  $(y, \tilde{y})$ ). Dicha redefinición viene dada por una transformación lineal. Esta transformaría

$$\mathbb{K}^\mathcal{I}(g, B) \rightarrow \mathbb{P}, \quad \mathbb{H}_\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{H}'_\mathcal{I}(g, B) \quad (3.2.15)$$

donde literalmente  $\mathbb{P} = (p, \tilde{p})$ , y el subíndice  $\alpha$  indica que son aquellos valores de momento y winding que producen, sobre el autodual, que el momento interno Left sea igual a la misma. Ahora podemos renombrar los generadores Cartanes, como fue hecho en el caso del círculo para quitarnos así la dependencia de los módulos, i.e.  $H'_\mathcal{I} \equiv \mathbb{H}'_\mathcal{I}(g, B)$ . Por linealidad, podemos aplicar la transformación a (3.2.15) y obtenemos que

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \mathbb{P}_\alpha^\mathcal{I} H'_\mathcal{I} & [\hat{E}_{\hat{\alpha}}, \hat{E}_{-\hat{\alpha}}] &= \mathbb{P}_{\hat{\alpha}}^\mathcal{I} H'_\mathcal{I} \\ [H'_\mathcal{I}, E_\alpha] &= \mathbb{P}_\alpha^\mathcal{I} E_\alpha & [H'_\mathcal{I}, \hat{E}_{\hat{\alpha}}] &= \mathbb{P}_{\hat{\alpha}}^\mathcal{I} \hat{E}_{\hat{\alpha}} \end{aligned}$$

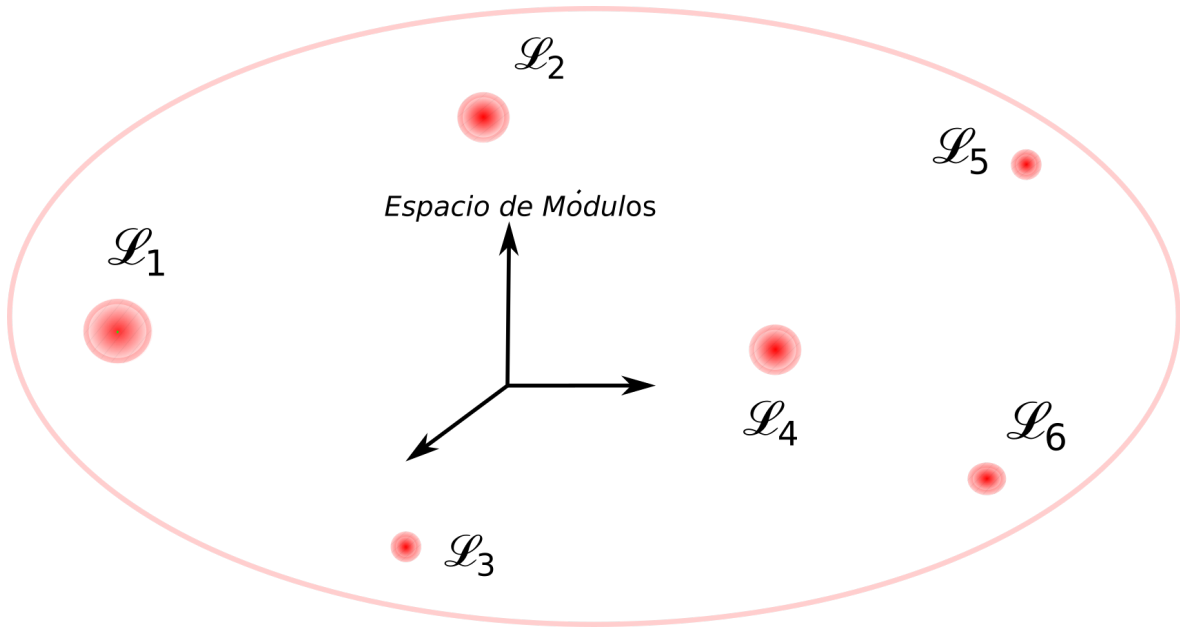
Esta escritura es independiente del background, los módulos no figuran en ella. Por lo tanto, el álgebra (4.1.20) es *siempre* la misma (como en el caso del círculo).

### 3.3. Resumen y Discusión

Hemos mostrado como conseguir flujos generalizados  $f_{ABC}(g, B)$  dependientes de los módulos que puedan describir localmente todos los procesos de aumento/ruptura de simetría que presenta la teoría de cuerdas bosónica. Tal proceso es inspirado en el marco de compactificaciones tipo Scherk Schwarz aplicada a DFT, dando como punto de partida al Lagrangiano (4.1.7). Se ha dado un ejemplo de vielbeins generalizados concreto que realiza el caso del aumento/ruptura del  $SU(2) \times SU(2)$  en la compactificación sobre el círculo.

La realización de los vielbein en general no ha podido obtenerse y se propone como un posible campo de investigación futura. Muy probablemente sea porque para grupos de aumento de simetría con más de una raíz simple ( $SU(N)$  con  $N > 2$ ) el papel de los cociclos en cuerdas comienza a ser muy importante. Trateremos esto en el Capítulo 5. Para los casos donde si se ha encontrado cabe señalar que el vielbein es explícitamente no-geométrico al depender de las coordenadas dobles  $\mathbb{Y} = (y, \tilde{y})$ .

De todas maneras, con o sin vielbeins generalizados, la acción (4.1.7) puede tomarse como punto de partida en DFT, siempre y cuando pueda encontrarse una expresión para los flujos generalizados dependiente de los módulos. La regla para obtenerlos fue inspirada



**Figura 3.1:** El espacio de módulos, conformado por los valores de  $(G_{mn}, B_{mn})$ . Cada “hueco” ha sido cubierto en su entorno utilizando compactificaciones de Scherk-Schwarz de DFT. El espacio tangente es agrandado por lo que para cada cubrimiento hace falta proponer un Lagrangiano  $\mathcal{L}_i$ , con  $i$  barriendo la cantidad de puntos de aumento de simetría. En el centro de cada cubrimiento se encuentra el punto de aumento de simetría.

desde cuerdas y funciona a la perfección, i.e. la acción obtenida *describe* los grados de libertad livianos en, y en el entorno de, el punto de aumento de simetría. Más aún, características del mecanismo de Higgs, como los Goldstone, se reproducen; la dependencia en los módulos de los coeficientes de la acción efectiva resultante, tales como masas, acoplamientos, etc., es reproducida exactamente y no como una expansión en algún parámetro que mida qué tan alejado se está del punto fijo. Es interesante también notar que la ruptura sucede cuando hay mezcla entre índices Left y Right en los flujos (cuando esto ocurre los vectores cargados adquieren masa)

Vale aclarar, que la acción (4.1.7) no describe en *simultáneo* todos los posibles puntos fijos, ya que para cada uno, la cantidad de valores que toman los índices dobles cambia (recordar que  $A = 1, \dots, n + r$ , donde  $r$  es el número de dimensiones compactas y  $n$  es la cantidad de raíces del grupo). Por lo tanto, podemos hacernos una imagen de lo que hemos logrado aquí parecida a la que se ve en la Figura 3.1: Un Lagrangiano  $\mathcal{L}_i$ , con  $i$  enumerando cada punto de aumento de simetría, es propuesto para cubrir cada uno de los “huecos” de la Figura 2.1 en el Capítulo anterior.

Cada dirección extra en el espacio tangente está asociada a estados con momento KK y winding no triviales (de hecho, vinculados con  $\mathbb{P}^2 = \pm 1$  para los vectores). Puede parecer molesto que al moverse continuamente entre puntos de aumento de simetría el número de dimensiones extra pueda cambiar discretamente. En teoría de cuerdas los vectores que se vuelven no-masivos dando lugar al aumento de simetría de gauge resultan ser **todos** modos de un mismo operador de vértice. Se podría pensar entonces que DFT en bajas dimensiones debería permitir la presencia de un nuevo campo vectorial, de la forma  $A_\nu(x, \mathbb{Y})$  donde  $\mathbb{Y}$  son

coordenadas en el Toro doble, cuyos modos incluyan a aquellos g.d.l. que aumentan el grupo. Es decir, se puede entender esto como una expansión en modos GKK como la del Capítulo 2, pero permitiendo ahora que la LMC con la que se restringe a los desarrollos de Fourier pueda ser  $\delta(\mathbb{P}^2) = \pm 1, 0$ . En concreto

$$A_\nu(x, \mathbb{Y}) = \sum_{\mathbb{P}} A_\nu^{(\mathbb{P})}(x) e^{i\mathbb{P}_M \mathbb{Y}^M} \delta(\mathbb{P}^2, 1) \quad (3.3.1)$$

$$A_\nu^I(x, \mathbb{Y}) = \sum_{\mathbb{P}} A_{L\nu}^{I(\mathbb{P})}(x) e^{i\mathbb{P}_M \mathbb{Y}^M} \delta(\mathbb{P}^2, 0), \quad (3.3.2)$$

donde la dependencia con los módulos aparece en  $\mathbb{Y}$ . Al moverse continuamente a lo largo del espacio de módulos, para ciertos valores de  $\mathbb{P}$ , alguno de los  $A_\nu^{(\mathbb{P})}$  comenzará a volverse no-masivo. Por ejemplo, para la compactificación sobre el Toro  $T^2 \times \tilde{T}^2$  seis modos (??) se vuelven no masivos, cuando los módulos son  $g_{11} = g_{22} = -2g_{12} = -2B_{12} = 1$ , dando lugar a los campos cargados de  $SU(3)_L$ . Apartándose de este punto, las masas de estos modos varían continuamente desde cero. Cuando se alcanza el punto  $g_{11} = g_{22} = 1; B_{12} = 0$  otros modos (los mostrados en (B.1.4)) se vuelven no masivos<sup>11</sup> dando lugar al aumento  $SU(2)_L^2$ . El Capítulo 5 se encarga de desarrollar el marco de trabajo para esta construcción.

Se ha trabajado aquí con la cuerda bosónica por simplicidad. Sería interesante ver si los razonamientos aquí expuestos son aplicables en la cuerda Heterótica (ya que es la única supercuerda que presenta aumentos de simetría a lo largo del espacio de módulos). En el Capítulo siguiente se trabajará sobre esto teniendo en cuenta a los fermiones también.

---

<sup>11</sup>Notar que hay un modo en común en ambos puntos, el  $\mathbb{P} = (\pm 1, 0, \pm 1, 0)$ .

# Capítulo 4

## Aumento de Simetría en la Heterótica

Como hemos en el Capítulo anterior, la idea ahora es extender los resultados obtenidos a las supercuerdas. Es decir, tener en cuenta los aumentos de simetría en la descripción efectiva de compactificaciones toroidales de las supercuerdas.

En tales backgrounds, cuando no se tienen en cuenta orbifolds [29], solo la cuerda Heterótica presenta este efecto. Por lo tanto, traduciremos los resultados encontrados en el Capítulo anterior para la bosónica a esta supercuerda, viendo como cada una de las propiedades encontradas anteriormente se reproduce aquí. Además tendremos en cuenta la inclusión de los fermiones.

Además, el efecto de las líneas de Wilson, es tenido en cuenta en los procesos de aumento de simetría.

### 4.1. Adaptación a la Heterótica

Las compactificaciones toroidales de la cuerda Heterótica  $SO(32)$  (o  $E_8 \times E_8$ ) a  $d$  dimensiones espacio-temporales dan lugar a un grupo de gauge genérico

$$G_L \times U(1)_R^{10-d}, \quad (4.1.1)$$

donde el grupo Left  $G_L$  es generalmente producto de grupos no-Abeliano y Abelianos. El rango de  $G_L$  es  $r_L = 16 + 10 - d = 26 - d$  originado a partir de los 16 Cartanes del grupo de gauge en 10 dimensiones más los  $r = 10 - d$  vectores (Cartanes) provenientes de las combinaciones Left de la reducción KK de la métrica y el tensor antisimétrico.

En un punto genérico del espacio de módulos el grupo Left resulta  $G_L = U(1)_L^{26-d}$ . Al variar los módulos pueden aparecer diferentes grupos aumentados. Vale la pena recordar que solo ocurren aumentos de simetría en el sector Left, es decir, solo aparecen estados cargados con winding y momento KK no triviales y no-masivos en dicho sector (las corrientes de los vértices que dan lugar al álgebra en la hoja mundo son Left). El máximo grupo posible de aumento de simetría resulta ser  $G_L = SO(52 - 2d)$  para el caso de la cuerda  $SO(32)$ .

### Aumento de simetría en sector Left

Probemos que solo el aumento de simetría puede ocurrir en el sector Left. Para esto, recordemos la notación usual: Para  $d$  dimensiones espacio-tiempo, los momentos Left y Right están codificados en

$$\mathbb{L} = (l_L, l_R) \quad (4.1.2)$$

los cuales están definidos sobre una red autodual  $\Gamma_{26-d, 10-d}$  de signatura  $(26-d, 10-d)$ . Luego, al descomponer el momento en direcciones de la red  $l_L^I = (K_L^I, k_{L,m})$  con  $I = 1, \dots, 16$  y  $m = 1, \dots, 10-d = r$ , los momentos dependientes de los módulos se leen

$$\begin{aligned} K_L^I &= P^I + R A_n^I \tilde{p}^n \\ k_{L,m} &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left[ \frac{p_m}{R} + (g_{mn} - B_{mn}) \frac{\tilde{p}^n}{R} - P^I A_m^I - \frac{R}{2} A_m^I A_n^I \tilde{p}^n \right] \\ k_{R,m} &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left[ \frac{p_m}{R} + (-g_{mn} - B_{mn}) \frac{\tilde{p}^n}{R} - P^I A_m^I - \frac{R}{2} A_m^I A_n^I \tilde{p}^n \right], \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

donde  $g_{mn}, B_{mn}$  son la métrica interna y el tensor antisimétrico internos,  $A_m$  son las líneas de Wilson,  $p_n$  y  $\tilde{p}^n$  son enteros correspondientes al momento KK y winding respectivamente.  $P^I$  son las componentes de los pesos de  $Spin(32)$ .

Las masas, Left y Right, vienen dadas por las fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'}{2} m_L^2 &= \frac{1}{2} l_L^2 + (N_B - 1) = \frac{1}{2} K_L^2 + \frac{1}{2} k_L^2 + (N_B - 1) \\ \frac{\alpha'}{2} m_R^2 &= \frac{1}{2} k_R^2 + \bar{N}_B + \bar{N}_F + \tilde{E}_0, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

donde  $N, \bar{N}$  son el número de osciladores (ya sea bosónicos o fermiónicos),  $\tilde{E}_0 = -\frac{1}{2}(0)$  para el sector NS (R) y la LMC  $\frac{1}{2} m_L^2 - \frac{1}{2} m_R^2 = 0$ , la cual en términos de la notación de arriba

$$\mathbb{L}^2 = \frac{1}{2} l_L^2 - \frac{1}{2} k_R^2 = 1 - N_B - \bar{N}_B - \bar{N}_F - \tilde{E}_0. \quad (4.1.5)$$

Entonces, si queremos nuevos estados no-masivos que aumenten el grupo de simetría, podemos buscar primero aquellos que son vectores, es decir aquellos que tienen al menos algún oscilador. En el sector NS, tenemos que para que resulten no-masivos los estados debe ser

$$\frac{\alpha'}{2} m_R^2 = 0 = \frac{1}{2} k_R^2 + \bar{N}_B + \bar{N}_F - \frac{1}{2}$$

y por lo tanto debe resultar  $N_F = \frac{1}{2}$  con el resto de los términos nulos, en particular  $k_R = 0$ , por lo tanto de existir un aumento de simetría en el sector NS no dará lugar a corrientes cargadas Right. Por otro lado, en el sector Left debe suceder

$$\frac{\alpha'}{2} m_L^2 = 0 = \frac{1}{2} l_L^2 + (N_B - 1),$$

la cual nos lleva a las mismas conclusiones que en la bosónica: o bien  $N_B = 1$  y  $l_L = 0$  (son los Cartanes) o bien  $N_B = 0$  y  $l_L = 1$ , siendo este último caso el correspondiente a los Cargados.



En conclusión, un estado no-masivo del sector NS puede tener solo corrientes cargadas Left, mostrando así que el aumento de simetría ocurre solo en este sector. Más aún, todos los valores de momento y winding encontrados en la bosónica que producen vectores Left no-masivos siguen haciendolo aquí (ya que la fórmula de  $m_L$  es la misma).

En el sector R procediendo con argumentos similares puede verse que los únicos estados no-masivos cargados que pueden aparecer se corresponden con los fermiones compañeros supersimétricos de los correspondientes vectores.

De todas maneras, los vectores cargados corresponden en general a  $\mathbb{L}^2 = 1$ . Con respecto a los Cartanes, hay  $10 - d + 16$  vectores Left donde 16 de ellos provienen de los vectores en 10 dimensiones que dan lugar al  $SO(32)$ , mientras que  $10 - d$  son combinación Left de la reducción KK de la métrica y el Kalb-Ramon. Los Cartanes tienen  $k_R = 0$  y  $l_L = 0$ , y por lo tanto no tienen winding ni momento KK.

En un punto del espacio de módulos genérico<sup>1</sup>,  $k_R \neq 0$  y por lo tanto no hay bosones de gauge no-masivos extra. En tal situación el grupo de gauge sería  $U(1)_L^{26-d} \times U(1)_R^{10-d}$ . Cuando se apagan las líneas de Wilson, para winding y momento KK nulos y para  $P^2 = 2$  la red autodual da lugar al grupo de gauge  $SO(32)_L \times U(1)_L^{10-d} \times U(1)_R^{10-d}$  como es esperado de una reducción dimensional KK.

Para valores específicos de los módulos, momento KK y winding, el grupo Left puede aumentar hasta un máximo  $SO(52 - 2d)_L \times U(1)_R^{10-d}$ . Recordar que el rango del grupo es siempre  $36 - 2d$ .

## Heterótica desde DFT

Sea  $n = n_c + r_L = \dim G_L$  la dimensión del grupo  $G_L$  para algún valor de los módulos, donde  $n_c$  denota el número de generadores cargados. La teoría efectiva de bajas energías tendrá por lo tanto una teoría de gauge  $G_L \times U(1)_R^{10-d}$  acoplada a gravedad más el tensor antisimétrico Kalb-Ramond en  $d$  dimensiones. Además hay  $(n_c + 26 - d)(10 - d)$  escalares. Si contamos la cantidad de grados de libertad tenemos que:  $d^2$  corresponden al gravitón más el campo  $B$ ,  $n_c + 36 - 2d$  son vectores del  $G_L \times U(1)_R^{10-d}$  y  $(n_c + 26 - d)(10 - d)$  son escalares. Vale recordar que los escalares corresponden a  $(26 - d)(10 - d)$  tipo “módulos” (es decir, viene la compactificación del sector de supergravedad más aquellos del  $SO(32)$  contruídos a partir de los mismos vértices que los correspondientes vectores pero con osciladores internos) más  $n_c(10 - d)$  escalares extra que serían masivos en puntos genéricos del espacio de módulos, es decir, cuando el grupo de simetría es  $U(1)_L^{26-d} \times U(1)_R^{10-d}$  (nuevamente, estos son aquellos contruídos con los mismos vértices cargados que los correspondientes vectores pero con osciladores internos).

Al igual que en el Capítulo 3 es interesante notar que el número total de grados de libertad

---

<sup>1</sup>Al decir genérico queremos decir incluso que la red deja de ser autodual. En cuerdas esto es imposible ya que la propia teoría fija a la red 16 dimensional a ser autodual apareciendo de este modo estados cargados con  $P^2 = 2$  que construyen el  $SO(32)$ . En otras palabras, se podría decir que la cuerda Heterótica vive consistente solo en un punto autodual de la red interna

coincide con

$$\dim \frac{O(d+n, d+r)}{O(d+n) \times O(d+r)} = d^2 + d(n_c + 36 - 2d) + (n_c + 26 - d)(10 - d). \quad (4.1.6)$$

Motivados por los razonamientos expuestos anteriormente (Capítulo 3) aplicados a la cuerda bosónica usaremos este cociente para expresar la teoría efectiva en un lenguaje de DFT, al proponer una expresión para la acción y discutir sus características. Nuevamente la acción se construye a partir de los flujos generalizados en el marco de las compactificación tipo Scherk-Schwarz, en las que los mismos vienen dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} &= E_{\bar{C}M} \mathcal{L}_{E_{\bar{A}}} E_{\bar{B}}^{\mathcal{M}} \\ \mathcal{F}_{\bar{A}} &= -e^{2d} \mathcal{L}_{E_{\bar{A}}} e^{-2d} \end{aligned}$$

Este último ( $\mathcal{F}_{\bar{A}}$ ) será puesto a cero ya que no será necesario utilizarlo. Los índices  $\mathcal{M}$  suelen barrer la representación fundamental de  $O(d, d)$  en la cuerda bosónica. Sin embargo, la construcción puede ser más general y extenderse a  $O(d_L, d_R)$ , donde los índices se suben o bajan con la correspondiente métrica del grupo

$$\eta^{PQ} = \begin{pmatrix} 1_{d_L} & 0 \\ 0 & -1_{d_R} \end{pmatrix}.$$

y una forma numérica similar  $\eta^{\bar{A}\bar{B}}$  para los índices planos. En general, los flujos dependen de las coordenadas que viven en la representación vectorial del  $O(d_L, d_R)$ , pero como pensamos en compactificaciones Scherk-Schwarz impondremos la SC sobre las coordenadas externas pero no sobre las internas. Inspirados por la estructura del coset (4.1.6) elegimos  $d_L = d + n_c + (26 - d) = d + n$  y  $d_R = d + (10 - d) = d + r$ . Las coordenadas son  $\mathbb{X}^{\mathcal{M}} = (x_\mu, \tilde{x}^\mu, \mathbb{Y}^A)$  donde la SC es impuesta en  $\tilde{x}^\mu$ , con  $\mathbb{Y}^A = (y_L^{m_L}, y_R^{m_R})$ . Además  $A = (a_L, a_R)$  es un índice interno con  $a_L = 1, \dots, n$  y  $a_R = 1, \dots, 10 - d$  mientras que  $\mu = 1, \dots, d$ . Aquí  $r = 10 - d$  es el número de dimensiones compactas y  $n = n_c + 26 - d$  es el número de direcciones extra necesarias para lograr el aumento de simetría.

Con todo esto presente, la construcción de la acción de DFT con flujos en el marco de Scherk-Schwarz e imponiendo la SC en las coordenadas externas nos lleva a la acción

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \frac{1}{2\kappa_d^2} \int d^d x \sqrt{g} e^{-2\varphi} \left[ \mathcal{R} + 4\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \mathcal{H}_{AB} F^{A\mu\nu} F_{\mu\nu}^B + \frac{1}{8} (D_\mu \mathcal{H})_{AB} (D^\mu \mathcal{H})^{AB} - V \right]. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Donde

$$V = -\frac{1}{12} f_{AB}{}^K f_{LC}{}^D (\mathcal{H}^{AL} \mathcal{H}^{BC} \mathcal{H}_{KD} - 3 \mathcal{H}^{AL} \eta^{BC} \eta_{KD} + 2 \eta^{AL} \eta^{BC} \eta_{KD}) - \Lambda \quad (4.1.8)$$

es el potencial escalar. Puede parecer al principio *exactamente* la misma acción que la del

Capítulo anterior, y de hecho en parte lo es. La parte sutil aquí es a través del cociente: es como si el espacio tangente aumentase diferente según la dirección sea Left o Right. Los escalares parametrizan el  $\frac{O(n,r)}{O(n) \times O(r)}$  de dimensión  $(n_c + 26 - d)(10 - d)$ . Los índices pueden ser expandidos en la base L-R (llamada  $\mathcal{C}$  base) como  $A = (a, \hat{I})$ , donde  $a = 1, \dots, r_L, r_L + 1, \dots, r_L + n_c = n = \dim G_L$  corren sobre el grupo Left  $G_L$ . Los índices  $\hat{I} = 1, \dots, r$  corresponden al grupo Right  $U(1)^r$ . Las contracciones de los índices se hacen ahora con la métrica  $\eta^{AB}$  invariante de  $O(r_L + n_c, r)$

$$\eta^{AB} = \begin{pmatrix} 1_{r_L+n_c} & 0 \\ 0 & -1_r \end{pmatrix}. \quad (4.1.9)$$

Al igual que antes  $\mathcal{H}_{AB}$  es la métrica generalizada que codifica información sobre los campos escalares,  $\mathcal{R}$  es el escalar de Ricci  $d$ -dimensional, y  $F_{\mu\nu}^A$  y  $H_{\mu\nu\rho}$

$$\begin{aligned} F^B &= dA^B - \frac{1}{2\sqrt{2}} f_{CD}{}^B A^C \wedge A^D \\ H &= dB + F^C \wedge A_C - \frac{1}{3!\sqrt{2}} f_{ABC} A^A \wedge A^B \wedge A^C, \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

son el tensor de gauge y el tensor del campo  $B$ .

También nuevamente aparecen las derivadas covariantes

$$(D_\mu \mathcal{H})_{AB} = (\partial_\mu \mathcal{H})_{AB} + \frac{1}{\sqrt{2}} f_{LA}^K A_\mu^L \mathcal{H}_{KB} + \frac{1}{\sqrt{2}} f_{LB}^K A_\mu^L \mathcal{H}_{AK}. \quad (4.1.11)$$

donde nuevamente los flujos (internos)  $f_{ABC} = \eta_{AK} f_{BC}^K$  son completamente antisimétricos, hay  $\frac{(r+n)(r-1+n)(r-2n)}{3!}$  de ellos y deben satisfacer el vínculo cuadrático

$$f_{[AB}{}^K f_{K]C}{}^R = 0. \quad (4.1.12)$$

Si se les permite a los índices transformar la acción resulta ser globalmente invariante ante  $O(n_c + 26 - d, 10 - d)$  y puede ser identificada con el sector bosónico (eléctrico) de supergravedad gauge semimáximal [30–33]. A pesar del hecho de que este gran número de flujos fue explorado en distintas situaciones, su interpretación física necesita ser investigada. Por ejemplo, si nos restringimos a  $a = 1, \dots, r = 10 - d$ , y en  $r = 6$  dimensiones, el conteo de flujos daría 220 correspondientes al sector eléctrico de la supergravedad gauge  $O(6, 6)$ . Estos flujos han sido identificados (ver [11, 31, 34]) como flujos geométricos y no-geométricos en compactificaciones de Teoría de Cuerdas (con orientifolios). Aquí nos restringiremos a una elección muy específica de un subconjunto de todos los posibles flujos que es relevante para la discusión.

Para hacer contacto con la acción efectiva de la cuerda expandimos primero la métrica generalizada en términos de las fluctuaciones escalares  $M_{a,\hat{I}}$  con  $\dim G_L \times r = (n_c + 26 - d)(10 - d)$  grados de libertad independientes

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}}^{AB} = \delta^{AB} + \mathcal{H}^{(1)AB} + \frac{1}{2} \mathcal{H}^{(2)AB} + \dots \quad (4.1.13)$$

de tal manera que los elementos de matriz son nulos a menos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{a\hat{I}}^{(1)} &= M_{a,\hat{I}}, & \mathcal{H}_{\hat{I}a}^{(1)} &= M_{a,\hat{I}}^T \\ \mathcal{H}_{ab}^{(2)} &= (MM^T)_{ab}, & \mathcal{H}_{\hat{I}\hat{J}}^{(2)} &= (M^T M)_{\hat{I}\hat{J}}.\end{aligned}\tag{4.1.14}$$

Al igual que en el caso bosónico haremos una elección específica de los flujos (y por lo tanto se rompe la simetría global), solo que esta vez su estructura será levemente distinta para tener en cuenta que el aumento de simetría es solo Left

$$f_{ABC} = \begin{cases} f_{abc} & G_L \text{ structure constants} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

donde  $f_{abc}$  es el subconjunto de todos los posibles flujos (con índices Left) que reproducen las constantes de estructura del álgebra de grupo  $G_L$ . Con todo esto presente, la acción de arriba se reduce a una teoría de gauge  $G_L \times U(1)_R^{10-d}$

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2\kappa_d^2} \int d^d x \sqrt{g} e^{-2\varphi} \left( \mathcal{R} + 4\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right) \\ &- \frac{1}{8} \left( \delta_{ab} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^b + \delta_{\hat{I}\hat{J}} \bar{F}^{\hat{I}\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}^{\hat{J}} - \frac{1}{2} g_d \sqrt{\alpha'} M_{a\hat{I}} F_{\mu\nu}^a \bar{F}^{\hat{I}\mu\nu} \right) \\ &- D_\mu M_{a\hat{I}} D_\nu M^{a\hat{I}} g^{\mu\nu} + \mathcal{O}(M^4),\end{aligned}\tag{4.1.15}$$

que reproduce el sector bosónico de la Heterótica a bajas energías sobre un punto fijo del espacio de módulos. Aquí  $a$  indexa el grupo de gauge Left (en general no-Abeliano) que se genera con vectores de gauge  $A_{L\mu}^a$ , mientras que  $\hat{I} = 1, \dots, r$  indexa al grupo abeliano  $U(1)_{\hat{I}}$  asociado a vectores  $A_{R\mu}^{\hat{I}}$ . Los campos escalares viven en la representación  $(\mathbf{dim} \mathbf{G}_L)_{\hat{\mathbf{q}}=0}$  adjunta de  $G_L$  y llevan carga cero  $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_r) = 0$  con respecto al grupo Right  $U(1)_R^r$ . Por lo tanto, la derivada covariante de los escalares en (4.1.11) se reduce a

$$D_\mu M_{a\hat{I}} = \partial_\mu M_{a\hat{I}} + g_d f_{la}^k A_{L\mu}^l M_{k\hat{I}},\tag{4.1.16}$$

donde  $g_d = \kappa_d \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}$ . Vale notar que con esta elección de flujos, ningún potencial escalar se genera.

Al igual que para el caso bosónico, puede romperse la simetría de la acción eligiendo los flujos (dependientes de los módulos) adecuados, produciendo así una suerte de mecanismo de Higgs. La teoría resultante debe reproducir las amplitudes de 3-puntos de la cuerda Heterótica. Discutiremos esto en lo que sigue. La traducción de la bosónica a este caso es inmediata.

#### 4.1.1. Mecanismo de Higgs via Flujos

Como hemos explicado en el Capítulo anterior, los flujos pueden ser leídos de las amplitudes de 3-puntos de vectores en cuerdas. En la Heterótica también puede utilizarse esta misma técnica, solo que ahora los vértices de los estados son diferentes que pues el sector Right es

de la supercuerda. Para los Cartanes, que indexamos con  $\check{I}_L = (i = 1, \dots, r; I = 1, \dots, 16)$ , los correspondientes vértices son  $V(\check{I}_L) \propto \partial_z y^{\check{I}} \tilde{\psi}^\mu e^{iK \cdot X}$ , mientras que para los cargados son  $V(l_L) \propto e^{il_L \cdot y(z)} e^{iK \cdot X}$  donde  $l_L^{\check{I}}$  son los momentos internos Left definidos en (C.1.2), y  $X^\mu(z)$  y  $K^\mu$  son las coordenadas espacio-tiempo y momento respectivamente.

Recordar que los momentos internos dependen de valores específicos de momento KK  $p_m$ , windings  $\tilde{p}^m$ , pesos  $P^I$  de la red  $\Lambda_{16}$  y de los módulos  $\Phi = (g, B, A)$  donde ahora  $A$  son las líneas de Wilson. Sobre puntos específicos  $\Phi_0$  en el espacio de módulos, para algunos valores de momento, winding y pesos ocurre que

$$k_R^{\check{\mathbb{P}}}(\Phi_0) = 0, \quad (l_L^{\check{\mathbb{P}}}(\Phi_0))^2 = 2 \quad (4.1.17)$$

y la simetría aumenta. Más aún, ocurre que

$$l_L^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi_0) \equiv \alpha^{(\check{\mathbb{P}})} \quad (4.1.18)$$

se transforman en las raíces  $\alpha^{(\check{\mathbb{P}})}$  del grupo  $G_L$ .

Siguiendo los razonamientos explicados en el Capítulo anterior, proponemos identificar los coeficientes de las amplitudes de tres vectores con las flujos generalizados obteniendo así un álgebra, incluso fuera del punto fijo  $\Phi_0$ . Definiendo

$$f_{\alpha^{(\check{\mathbb{P}})}\alpha^{(-\check{\mathbb{P}})}\check{I}_L}(\Phi) = l_L^{(\mathbb{P})}(\Phi)_{\check{I}}, \quad f_{\alpha^{(\mathbb{P})}\alpha^{(-\check{\mathbb{P}})}\hat{I}}(\Phi) = l_R^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi)_{\hat{I}} \quad (4.1.19)$$

obtenemos el álgebra (o equivalentemente, los flujos generalizados) fuera del punto fijo

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= l_L^{(\alpha)\check{I}} H_{\check{I}} + l_R^{(\alpha)\hat{I}} \hat{H}_{\hat{I}} & [H_I, E_\alpha] &= l_L^{(\alpha)I} E_\alpha \\ [E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}] &= f_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} E_{\alpha_3} & [\hat{H}_I, E_\alpha] &= l_R^{(\alpha)I} E_\alpha. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Al igual que antes hemos abreviar  $\alpha = \alpha^{(\mathbb{P})}$ , y resulta ser  $f_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = 1$  si  $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$  es una raíz y sino es nulo. Cualquier otro conmutador es nulo. Nuevamente, al (4.1.20) satisfacer Jacobi define un álgebra de Lie.

Como en los puntos fijos  $k_R^\alpha(\Phi_0) = 0$  y  $f_{\alpha-\alpha\hat{I}} = l_L^{(\alpha)\hat{I}} = \alpha^{\hat{I}}$ , el álgebra se reduce a la correspondiente para el grupo  $G_L$  en la base Cartan-Weyl. Al igual que antes, podemos mostrar que esta álgebra es en realidad la misma que para  $G_L$  al realizar una redefinición de los generadores. Para visualizarlo, nuevamente definimos el operador Cartan doble  $\mathbb{H}_A = (H_{\check{I}}, \hat{H}_{\hat{I}})$  y el momento doble (dependiente de los módulos)  $\mathbb{L}_A^{(\alpha)} = (l_L^{(\alpha)\check{I}}, l_R^{(\alpha)\hat{I}})$ . Luego, el álgebra (4.1.20) se reescribe como

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \mathbb{L}_A^{(\alpha)} \mathbb{H}_A \\ [\mathbb{H}_A, E_\alpha] &= \mathbb{L}_A^{(\alpha)} E_\alpha \\ [E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}] &= f_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} E_{\alpha_3} \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Podemos ahora realizar una transformación lineal a los generadores Cartanes (igual que para la bosónica) de tal manera que el álgebra quede independiente de los módulos. Esta vez

tendrán que ser tenidas en cuenta las líneas de Wilson. En efecto, resulta

$$\begin{pmatrix} \delta_{IJ} & 0 & A_{Jn}\delta_{nm} \\ -A_m^J\delta_{JI} & \delta_{nm} & G_{nm} - B_{nm} - \frac{R}{2}A_n^I A_m^I \\ -A_m^J\delta_{JI} & \delta_{nm} & -G_{nm} - B_{nm} - \frac{R}{2}A_n^I A_m^I \end{pmatrix}, \quad (4.1.22)$$

de tal manera que  $\mathbb{L}^{(\alpha)}$  se mapea a  $\check{\mathbb{P}}$  y  $\mathbb{H}$  a los nuevos Cartanes dobles  $\mathcal{H}$  dejando

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \check{\mathbb{P}}_A^{(\alpha)} \mathcal{H}_A \\ [\mathcal{H}_A, E_\alpha] &= \check{\mathbb{P}}_A^{(\alpha)} E_\alpha \\ [E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}] &= f_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} E_{\alpha_3}. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Esta álgebra es independiente de los módulos y por lo tanto isomorfa al álgebra de  $G_L$ .

Como comentario final de esta sección vale aclarar que con los flujos obtenidos fuera de los puntos críticos, puede calcularse la acción fuera del autodual (sector bosónico). Términos como: Masa de Vectores, Masa de Escalares y Grados de libertad Goldstone pueden observarse repitiendo los cálculos mostrados en el Capítulo anterior. La acción se corresponde (a tres puntos) con la efectiva de la cuerda Heterótica fuera de un punto crítico .

Veamos ahora ejemplos concretos de todo esto. En particular analicemos los aumentos de simetría máximos posibles. Estos son particularmente interesantes de estudiar, ya que la interpretación de las 16 coordenadas extra del sector Left de la cuerda juegan un papel fundamental.

## 4.2. Ejemplos de Aumentos

En esta sección discutimos ejemplos de distintos aumentos de simetría para el caso de la compactificación a un círculo de radio  $R$ . En este caso los momentos (C.1.2) son

$$\begin{aligned} K_L^I &= P^I + R A^I \tilde{p} \\ k_L &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left[ \frac{p}{R} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{R}} - P \cdot A - \frac{R}{2} A \cdot A \tilde{p} \right] \\ k_R &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left[ \frac{p}{R} - \frac{\tilde{p}}{\tilde{R}} - P \cdot A - \frac{R}{2} A \cdot A \tilde{p} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Un estado no-masivo necesita que  $k_R = 0$  ( $\tilde{N}_F = 1$ ) y entonces  $k_L = \sqrt{2\alpha'} \frac{\tilde{p}}{R}$ .

### Caso $SU(2) \times SO(32) \times U(1)$

Un caso posible de vectores no-masivos ocurre cuando  $p = \tilde{p} = \pm 1$ , al elegir el radio en su valor autodual  $R = \sqrt{\alpha'} = \tilde{R}$  y apagar todas las líneas de Wilson  $A^I = 0$ . Estos estados junto a los vectores no-masivos asociados a la compactificación KK ( $p = \tilde{p} = 0 = P^I$ ) dan lugar a un grupo de gauge  $SU(2)$  (Left).

Además, hay un  $SO(32)$  asociado a estados con pesos  $P = (\underline{\pm, \pm, \dots, 0})$  (el subrayado

significa permutaciones sobre las 16 entradas) y los correspondientes Cartanes en las 16 direcciones internas de la Heterótica. Por lo tanto, sobre este punto del espacio de módulos, el grupo de gauge aumentado es  $SO(32)_L \times SU(2)_L \times U(1)_R$ .

El grupo  $SO(32)_L \times SU(2)_L \times U(1)_R$  puede romperse a  $SO(32)_L \times U(1)_L \times U(1)_R$  o a  $U(1)_L^{17} \times U(1)_R$  dependiendo de la dirección en el espacio de módulos sobre la que se avance para alejarse del punto fijo. Por ejemplo, al mover el radio de su valor autodual, los vectores cargados del  $SU(2)$  se vuelven masivos, con masas  $m_-^2 = (\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} a_-)^2 = (\frac{1}{R} - \frac{1}{R})^2$ , donde  $a_\pm$  están definidas en (??). El álgebra (4.1.21) se escribe como

$$\begin{aligned} [E_+, E_-] &= 2(a_+ H_3 + a_- H_{\bar{3}}) & [E_P, E_{-P}] &= P_I H_I \\ [H_3, E_\pm] &= \pm a_+ E_\pm & [H_I, E_P] &= P_I E_P \\ [H_{\bar{3}}, E_\pm] &= \pm a_- E_\pm & [E_{P_1}, E_{P_2}] &= f_{P_1 P_2 P_3} E_{P_3}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Los subíndices  $\pm$  denotan las dos posibles raíces de  $SU(2)$  y el subíndice 3 denota el correspondiente generador Cartan. Las  $f_{P_1 P_2 P_3}$  son constantes de estructura del  $SO(32)$  donde los  $P_I$  son las raíces y los  $H_I$  los correspondientes generadores Cartanes. Sobre el radio autodual se tiene que  $a_- = 0$ ,  $a_+ = 1$  recuperandose la escritura usual del álgebra de  $SU(2)$ .

Al prender las líneas de Wilson  $A^I$  el grupo se rompe a  $U(1)_L^{17} \times U(1)_R$ . El álgebra queda en este caso

$$\begin{aligned} [E_+, E_-] &= (2 - \frac{1}{2} A^2) H_3 + (\frac{1}{2} A^2) H_{\bar{3}} + A^I H_I & [E_P, E_{-P}] &= P_I H_I - (P \cdot A) H_3 - (P \cdot A) H_{\bar{3}} \\ [H_3, E_\pm] &= \pm (2 - \frac{1}{2} A^2) E_\pm & [H_I, E_P] &= P_I E_P \\ [H_{\bar{3}}, E_\pm] &= \pm (\frac{1}{2} A^2) E_\pm & [E_{P_1}, E_{P_2}] &= f_{P_1 P_2 P_3} E_{P_3} \\ [H_I, E_\pm] &= \pm A^I E_\pm & [H_{\bar{3}}, E_P] &= -(P \cdot A) E_P. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Como se mostró en el Capítulo anterior, las masas de los vectores se identifican con aquellos flujos que mezclan el sector Left y Right (en índices). Por lo tanto tendríamos en este caso que los vectores cargados frente al  $SU(2)$ , i.e.  $A_\mu^\pm$ , adquieren una masa  $m_{SU(2)} = |f_{3\pm}^\pm| = \frac{1}{2} A^2$  mientras que los cargados frente a  $SO(32)$  adquieren  $m_{SO(32)} = |f_{\bar{3}P-P}| = |P \cdot A|$ . Como fue probado en general, los conmutadores de arriba son simplemente reescritas del álgebra  $SU(2) \times SO(32)$  solo que ahora la teoría involucra estados masivos.

### Máximo aumento de simetría: $SO(34)$

Existen otros posibles aumentos de simetría a lo largo del espacio de módulos. En particular existe un máximo posible, donde máximo se refiere a un grupo con la misma cantidad de Cartanes (tantas como direcciones compactas) y la mayor cantidad de raíces posibles. Al elegir [35, 36]  $\tilde{R} = \sqrt{2\alpha'}$  y  $RA = (-1, \dots, 0)$  notamos que para  $\tilde{p} = 0$  se obtienen estados no-masivos si  $P = (\pm, \pm, \dots, 0)$ , i.e. raíces de  $SO(32)$ , y si el momento KK se fija a  $p = -P^1$ . Más aún, los pesos de  $SO(32)$ , i.e.  $P = (\pm, \pm, \dots, 0), (0, \dots, 0), (2, \dots, 0)$ , combinados con  $\tilde{p} = \pm 1$  dan lugar a estados con  $l_L = (\pm; \pm, \dots, 0)$  que al combinarse con las raíces de  $SO(32)$  arman estados no-masivos con cargas  $l_L = (\pm; \pm, \dots, 0)$  que se corresponden con las bien conocidas raíces de

$SO(34)$  [35, 36]. Es decir, el grupo queda aumentado a  $SO(34)$ .

Como comentario final de esta sección, recordar que todas estas descripciones son válidas en los entornos de cada punto de aumento de simetría, ya sea  $SU(2) \times SO(32) \times U(1)$  (definido por valores específicos de los módulos y momentos/winding/pesos) o el punto  $SO(34)$  (en el cual otros valores de momento/winding/pesos son necesarios). No es posible, en esta etapa, interpolar entre distintos puntos de aumento de simetría de manera continua.

### 4.3. Incluyendo Fermiones

La acción (4.1.7), para  $d = 4$ , no es otra cosa que la correspondiente para el sector  $N = 4$  bosónico (eléctrico) de supergravedad gauge (ver [30–33]). Luego puede verse que la reducción de Scherk-Schwarz de DFT da una manera de derivar este sector de supergravedad gauge.

Para incluir el sector magnético es necesario considerar EFT o una extensión del grupo Global inicial. La inclusión de los fermiones desde el punto de vista de DFT fue considerado en muchos trabajos [37, 38], y en particular, una reducción dimensional tipo Scherk-Schwarz fue propuesta en [39] en el contexto de supercuerdas.

El objetivo de esta sección es mostrar que el mecanismo de aumento/ruptura de simetría a través de flujos dependientes de los módulos, encontrados en el sector bosónico, también está presente en el sector fermiónico.

Al invocar supersimetría, podemos concluir que el sector fermiónico no es otra cosa más que el sector fermiónico de supergravedades gaugegeadas. Primero nos concentraremos en el caso  $N = 4$  en 4 dimensiones y discutiremos su generalización más tarde. Por lo tanto, debemos lidiar con la simetría global  $O(6 + n, 6)$ . En particular nos concentraremos en los términos de masa de los fermiones. A saber, los términos cuadráticos contienen al gravitino  $\psi_{\mu i}$  y al gaugino  $\lambda_j^a$  (ver [30, 33])

$$e^{-1} \mathcal{L}_{\text{f.mass}} = \frac{1}{3} g A_1^{ij} \bar{\psi}_{\mu i} \Gamma^{\mu\nu} \psi_{\mu j} + ig A_{2ai}{}^j \bar{\psi}_{\mu i} \Gamma^\mu \lambda_j^a + A_{3ab}{}^{ij} \bar{\lambda}_j^a \lambda_j^a + \text{h.c.}, \quad (4.3.1)$$

donde las matrices  $A_1^{ij}, A_{2ai}{}^j, A_{3ab}{}^{ij}$  son conocidas como matrices de “corrimiento”. Los índices  $i$  expanden la representación espinorial de  $SO(6)$  o, equivalentemente, la representación 4-dimensional de  $SU(4)$ , que es el cobrimiento universal de  $SO(6)$ . Los vectores  $v_{\hat{m}}$  de  $SO(6)$  pueden ser contruidos en términos de combinaciones antisimétricas de la representación espinorial, o equivalentemente, en términos de la representación 6-dimensional de  $SU(4)$  antisimétrica  $v^{ij}$  a través de  $v_{\hat{m}}(\gamma^{\hat{m}})^{ij} = v^{ij}$  donde

$$v^{ij} = v^{[ij]} \quad \text{and} \quad v_{ij} = (v^{ij})^* = \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} v^{kl}. \quad (4.3.2)$$

Se sabe que las matrices de corrimiento dependen de escalares a través de  $\mathcal{U}_A^{\bar{A}}(x)$  que definen las matrices escalares. Explícitamente, tales cumplen

$$\mathcal{H}_{AB}(x) = \delta_{\bar{A}\bar{B}} \mathcal{U}_A^{\bar{A}} \mathcal{U}_B^{\bar{B}}. \quad (4.3.3)$$



con

$$\mathcal{U}_A^{\bar{A}}(x) \equiv (\mathcal{U}_A^a; \mathcal{U}_A^{\hat{I}}) = (\mathcal{U}_A^a; \mathcal{U}_A^{ij}), \quad (4.3.4)$$

donde los índices  $\hat{I}$  vectoriales de  $SO(6)$  fueron expresados en términos de los índices espinoriales  $ij$  en el último término.

Luego, las matrices de corrimiento se leen ahora como (ver [30, 33])

$$\begin{aligned} \text{gravitino-gravitino: } A_1^{ij} &\propto (\mathcal{U}_A^{kl})^* \mathcal{U}_B^{ik} \mathcal{U}_C^{jl} f^{ABC} \\ \text{gravitino - gaugino: } A_{2ai}{}^j &\propto \mathcal{U}_A^a (\mathcal{U}_B^{ik})^* \mathcal{U}_C^{jk} f^{ABC} \\ \text{gaugino - gaugino: } A_{3ab}{}^{ij} &\propto \mathcal{U}_A^a \mathcal{U}_B^b \mathcal{U}_C^{ij} f^{ABC}, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

donde han aparecido los flujos  $f^{ABC}$  del sector eléctrico [30]. Para leer los términos de masa debemos expandir en fluctuaciones escalares a  $\hat{I}$  y quedarnos con el término de orden cero (término constante en fluctuaciones)<sup>2</sup>. Por lo tanto, resulta  $(\mathcal{U}_A^b; \mathcal{U}_A^{\hat{I}}) = (\delta_A^b; \delta_A^{\hat{I}})$  con

$$\mathcal{U}_A^{ij} = \delta_{A\hat{m}}(\gamma^{\hat{m}})^{ij}. \quad (4.3.6)$$

Reemplazando esta expansión en las expresiones de las matrices de corrimiento encontramos que

$$\begin{aligned} A_1^{ij} &\propto \delta_{A,\hat{a}}(\gamma^{\hat{a}})^{*kl} \delta_{B,\hat{I}}(\gamma^{\hat{I}})^{ik} \delta_{C,\hat{c}}(\gamma^{\hat{c}})^{jl} f^{ABC} = (\gamma^{\hat{a}})^{*kl} (\gamma^{\hat{I}})^{ik} (\gamma^{\hat{c}})^{jl} f^{\hat{a}\hat{I}\hat{c}} \\ A_{2ai}{}^j &\propto (\gamma^{\hat{I}})^{*ik} (\gamma^{\hat{c}})^{jk} f^{a\hat{I}\hat{c}} \\ A_{3ab}{}^{ij} &\propto (\gamma^{\hat{c}})^{ij} f^{ab\hat{c}}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Al identificar los  $f^{ABC}$  con los flujos generalizados encontrados desde cuerdas, y usando que aquellos que tienen más de un índice Right se anulan ( $f^{\hat{a}\hat{I}\hat{c}} = f^{a\hat{I}\hat{c}} = 0$ ) encontramos que el gravitino permanece sin masa como es esperado (idem con dilatino). Por otro lado, los gauginos adquieren masas proporcionales a  $f^{ab\hat{c}}$ , las cuales, como es de esperar, son iguales a las de sus compañeros supersimétricos y por lo tanto se vuelven no-masivos en los puntos autoduales. Junto a los escalares y vectores llenan todo el supermultiplete vectorial  $\mathcal{N} = 4$ .

Ahora argumentaremos que la presente discusión para  $d = 4$  se puede extender a otras dimensiones. De hecho, para teoría semimaximales, los escalares forman un cociente  $G/H = SO(d, d+n)/SO(d) \times SO(d+n)$  y están codificados a través de  $\mathcal{U}_A^{\bar{A}} = (\mathcal{U}_A^a; \mathcal{U}_A^{\hat{I}})$  como en (4.3.4) donde ahora  $A$  es un índice vectorial de  $G = SO(d, d+n)$ ,  $a$  es un índice vectorial de  $SO(d)$  y  $\hat{I}$  es un índice vectorial de  $SO(d+n)$ . El índice  $\hat{I}$  es expresado en términos de índices espinoriales ya que los férmiones transforman ante  $H = Spin(d) \times SO(d+n)$ . Del conjunto de todos los posibles flujos es posible elegir un subconjunto parametrizado por un  $G$ -tensor antisimétrico  $f_{ABC}$ . En  $d = 4$  el total de flujos es parametrizado por  $\xi_{\alpha A}$  y  $f_{\alpha ABC}$  ( $\alpha = \pm$  es el índice eléctrico-magnético electri-magnetic index) y nos restringimos a  $\xi_{\alpha A} = 0$  y  $f_{+ABC} = f_{ABC}$ ,  $f_{-ABC} = 0$ . Lo mismo aplica en otras dimensiones<sup>3</sup>. Las matrices

<sup>2</sup>Recordar que  $\mathcal{H}_{AB} = \delta_{AB} + \mathcal{O}(M)$

<sup>3</sup>Si se quiere que esto siga valiendo en  $d = 9$  y  $d = 8$  se deben necesariamente incluir multipletes

de corrimiento se acoplarían a escalares a través del embebimiento tensorial y por lo tanto tendrán necesariamente la misma forma que en (4.3.5) pero donde ahora los índices  $i, j$  arman la representación espinorial de  $Spin(d)$ .

Al igual que antes, cuando los flujos son los correspondiente al punto de aumento de simetría, las matrices de corrimiento de los gravitinos son cero y la supersimetría es preservada. Fuera de tales valores los escalares, vectores y fermiones se organizan en un supermultiplete masivo.

## 4.4. Resumen y Discusión

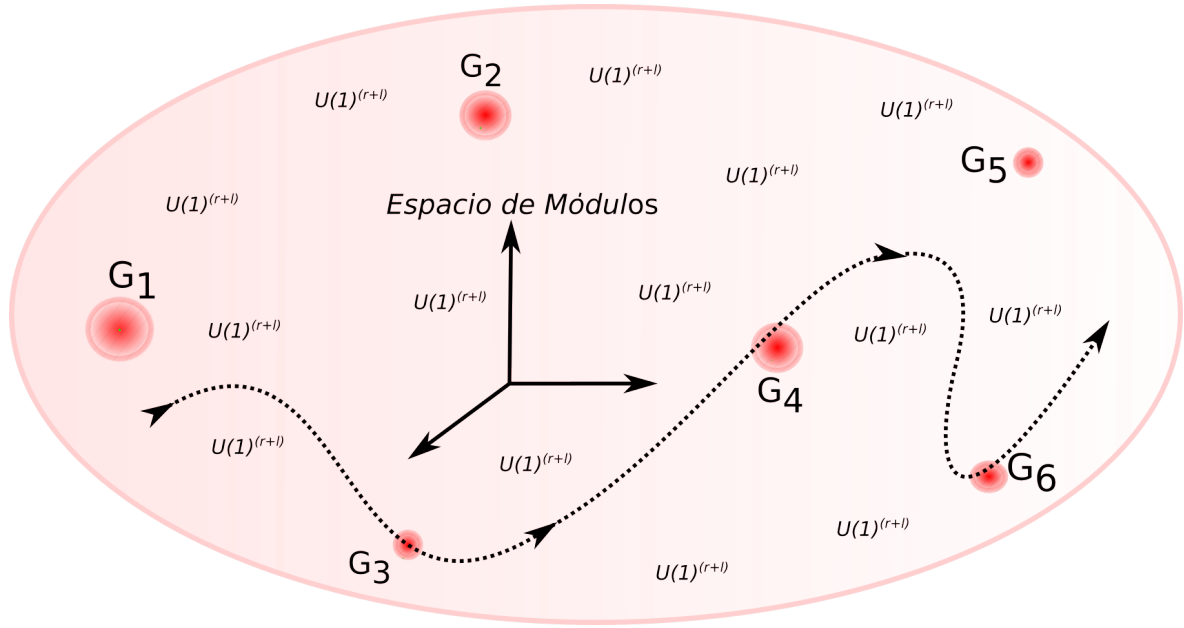
En este Capítulo hemos mostrado que se puede dar una descripción de los procesos de aumentos-rupturas de simetría de gauge que ocurren en la cuerda Heterótica para cierto valores específicos de los módulos. Los razonamientos involucrados son totalmente análogos a los realizados en el Capítulo 3 para el caso bosónico. Los ingredientes clave para codificar el proceso de aumento fueron: una acción de (super) gravedad gauge invariante global frente a  $O(n_1, n_2)$ , una expansión en fluctuaciones escalares de la métrica generalizada y la presencia de flujos generalizados (3-formas) dependiente de los módulos. La acción de la Heterótica es obtenida al elegir el grupo  $O(n, r)$  (donde  $n = \dim G_L$  es la dimensión del grupo de aumento en el punto en cuestión y  $r = 10 - d$  el número de dimensiones compactas) e identificar a los flujos dependientes de los módulos  $f_{ABC}(\Phi)$  con el momento interno de la cuerda.

Al invocar supersimetría, el sector fermiónico también puede ser incluido. En particular se muestra que al moverse fuera del punto de aumento de simetría  $\Phi_0$  se producen las masas esperadas para los supercompañeros de los vectores masivos sin romper la supersimetría.

Antes de saltar al próximo Capítulo, retomemos la discusión iniciada anteriormente. En los Capítulos anteriores hemos dado acciones cuyo sector no-masivo describe la fenomenología de la Teoría de Cuerdas (Bosónica y Heterótica) a lo largo del espacio de módulos. Sin embargo, los formalismos utilizados fueron muy diferentes: Expansión de Fourier en el espacio Doble Vs Aumento del espacio tangente en Scherk-Schwarz. Más aún, la descripción dada por cada uno es “disjunta”, como se puede ver de las Figuras 2.1 y 3.1. La idea para el próximo Capítulo será desarrollar un formalismo que de entrada logre cubrir todo el espacio de módulos. En particular, lo que se espera es poder dar una **única** acción  $S_{full}$  dependiente de los módulos  $\Phi$  que contenga suficientes estados (resultarán infinitos) y que siempre pueda escribirse como suma  $S_{full} = S_{massless}(\Phi) + S_{massive}(\Phi)$  donde  $S_{massless}$  contenga estados no-masivos o lo suficientemente livianos como para contribuir a la física de bajas energías, y  $S_{massive}$  contenga el resto de los (infinitos) estados que sean masivos. A medida que  $\Phi$  se mueve por el espacio de módulos estados en  $S_{massive}$  vayan reduciendo su masa hasta que eventualmente, si  $\Phi$  toca un punto de aumento de simetría, éstos se vuelvan no masivos y pasen a formar parte de  $S_{massless}(\Phi)$ . En el proceso, por supuesto, es de esperar que pueda ocurrir lo opuesto, i.e. estados de  $S_{massless}(\Phi)$  se vuelvan muy masivos continuamente y pasen a formar parte de  $S_{massive}$ . En la Figura 4.1 se muestra la idea.

---

vectoriales, y por lo tanto,  $n \geq 1$ . De otra forma,  $f_{ABC} = 0$ , ver [40–42].



**Figura 4.1:** Trayectoria en el espacio de módulos. En un punto générico la simetría de gauge es  $U(1)^{r+l}$ . A medida que la trayectoria se acerca al punto con simetría de gauge  $G_3$  estados en  $S_{masive}$  comienzan a perder masa y eventualmente pasan a formar parte de  $S_{massless}$ . Lo opuesto ocurre a medida que se aleja del mismo. El proceso similar ocurre para  $G_4$  o  $G_6$  en la Figura.

Veremos que el marco de trabajo utilizado es similar al del Capítulo 2, donde un desarrollo en modos de Fourier restringido a la LMC es necesario. En el proceso además será necesario incorporar nuevas propiedades al espacio Doble  $\mathbb{Y}$  que hasta ahora no habían sido tenidas en cuenta en DFT, como la existencia de una no-conmutatividad.



# Capítulo 5

## La Interpolación en el Espacio de Módulos

### 5.1. Introducción

Comencemos este capítulo resumiendo lo logrado hasta ahora en esta tesis. Primero, hemos logrado incluir (algunos) estados masivos con winding y momento KK en el marco de DFT cuando la cuerda se encuentra compactificada en un Toro. Hemos estudiado en general las propiedades de tal resultado. Pero, como ya a sido mencionado, el resultado no es válido para cualquier compactificación toroidal debido a que para ciertos tamaños de los radios, el fenómeno de aumento de simetría cobra importancia y éste no ha sido tenido en cuenta. Segundo, hemos podido incluir el fenómeno de aumento de simetría en el marco de DFT utilizando el formalismo de vielbeins generalizados aumentando el espacio tangente pero solo en un entorno de los puntos de aumento de simetría. Esto lo hemos mostrado tanto para la cuerda Bosónica como para la Heterótica incluyendo en la última fermiones. Este artificio (aumentar el tangente) permite además describir el *higgsing* que debe aparecer cuando uno se aleja un poco del punto autodual. Más aún, permite romper el grupo de tal manera de conseguir las masas y acoplamientos adecuados para los diferentes campos. Hasta el mecanismo de captura de bosones Goldstone es reproducido.

No obstante, es difícil no preguntarse si ambos procesos descriptos están de algún modo relacionados. Es decir, si existe alguna relación entre la expansión (toroidal) de Fourier en DFT con el uso de vielbeins generalizados para describir los aumentos de simetría. Es claro que la respuesta debería ser afirmativa, ya que ambos métodos cubren todos los posibles efectos de las compactificaciones toroidales (y lo hacen de forma disjunta, i.e. uno está definido donde el otro no lo está). La idea es pensar en alguna descripción que *siempre* describa a la cuerda a bajas energías, *sin importar* en que valor particular de los radios de compactificación uno se encuentre. Éste es el fin último de este Capítulo. Vale aclarar, como ya se ha hecho con capítulos anteriores, que el contenido de esta parte ha sido objeto de una publicación junto con mi Director de Tesis y colaboradores.

Sin más preámbulos, comencemos a describir lo hecho en esta parte del trabajo. Como

queremos conectar los procesos descritos anteriormente necesitamos trabajar con DFT en el marco de la cuerda Heterótica (para poder tener aumento de simetría).

Algo clave en nuestro análisis es la descripción del aumento de la simetría de gauge en compactificaciones toroidales via teoría de campos sin el uso de vielbeins generalizados. Como ya hemos mencionado, el aumento de simetría de gauge es un fenómeno muy característico de las cuerdas, asociado al hecho de que ellas son objetos extendidos y, por lo tanto, pueden enrollarse alrededor de ciclos no-contráctiles. Vale la pena repasar brevemente dicho fenómeno, con el fin además de introducir la notación necesaria para el Capítulo. En determinados puntos del espacio de módulos (i.e. puntos fijos bajo transformaciones de T-dualidad), estados bosónicos de vectores (y escalares también), asociados con valores definidos de winding y momento compacto, se vuelven no-masivos. Estos vectores, combinados con los vectores no-masivos heredados de la compactificación de la métrica y el tensor antisimétrico, dan lugar a un aumento del grupo de simetría de gauge  $G_1$  ( ver [43]). Además los desplazamientos en el espacio de módulos pueden encontrarse puntos fijos donde, en general, otros vectores asociados con valores diferentes de winding y momento se vuelven no-masivos dan lugar así a un grupo de gauge  $G_2$  aumentado distinto, etc. En puntos genéricos solo existe la simetría  $U(1)_L^{r+16} \times U(1)_R^r$ , donde  $r$  es el número de dimensiones compactas (este último caso es el estudiado en el Capítulo 2).

La teoría efectiva de bajas energías, *en un dado valor de los módulos*, donde se integran los estados masivos, puede ser descrita usando un Lagrangiano usual de teorías de gauge acoplado a gravedad sin referencia explícita a los windings. Al moverse lentamente fuera de este punto del espacio de módulos, la simetría de gauge se rompe. Esta ruptura puede ser entendida como un mecanismo de Higgs convencional y también, como fue probado desde un acercamiento de DFT en Capítulos anteriores y en [44, 45], como asociado a una dependencia en los módulos de lo que serían los flujos “constantes de estructura”

El objetivo de este Capítulo es escribir una acción efectiva (reducida dimensionalmente) para la cuerda Heterótica compactificada en un toro, la cual dependa de los valores de los módulos de tal manera que al variar el valor de los mismos, los diferentes puntos de aumento de simetría puedan ser alcanzados. Pero además, la idea es no utilizar el artilugio del aumento del tangente, i.e. solo utilizar campos y sus desarrollos de Fourier en un toro doble al estilo KK. Es decir, esta parte es la generalización de lo realizado en el Capítulo 2 de tal manera de incluir el fenómeno de aumento de simetría y terminar de abarcar así todos los puntos del espacio de módulos.

En general, los campos involucrados en DFT responden a un tipo de LMC específico, mientras que los grados de libertad que se vuelven no masivos en un punto autodual responden a un LMC *distinto*. Es por esto, que intuitivamente uno puede pensar que la acción que queramos conseguir involucre necesariamente dos tipos de campos, uno para cada LMC.

Esquemáticamente hablando, la idea es incorporar a la acción un campo bosónico vectorial  $A_\mu(x, \mathbb{Y})$  y un escalar  $M_{\mathcal{I}}(x, \mathbb{Y})$ , con una condición de LMC diferente, además del contenido usual de materia en diez dimensiones (métrica y Kalb-Ramond  $B_2$ ). Todos los campos deben depender de todas las coordenadas: tanto de las  $d$  del espacio tiempo  $x^\mu$  como de las internas

del Toro  $\tilde{\mathbb{Y}} \equiv (y^I, y^m, \tilde{y}_m)$ , como es usual en compactificaciones tipo KK. Las coordenadas  $y^I$  son las asociadas a los grados de libertad puros de la Heterótica (es decir, son 16 coordenadas); siguiendo el espíritu de DFT, las  $2r$  coordenadas dobles  $(y^m, \tilde{y}_m)$  son las canónicas conjugadas al momento interno y winding. Una expansión en modos *generalizada* (GKK) en las coordenadas periódicas internas produciría campos en  $d$  dimensiones  $A_\nu^{(\mathbb{L})}(x)$  (y  $M_{\mathcal{I}}^{(\mathbb{L})}(x)$ ) donde  $\mathbb{L}$  indexa los modos, dependientes de los winding y momentos de Kaluza-Klein. Como fue mencionado antes, para ciertos valores de los módulos *algunos* de estos modos  $\mathbb{L}$  se vuelven no-masivos y, al combinarse con los modos GKK que provienen de la reducción dimensional de la métrica y el campo  $B$ , producen un aumento del grupo de simetría de la acción.

En la vecindad de cada punto fijo del espacio de módulos y cuando los modos livianos (no masivos o masivos pero lo suficientemente livianos para ser relevantes a bajas energías) son conservados, la teoría de gauge efectiva usual es recuperada luego de integrar las coordenadas compactas internas. La simetría de gauge es aumentada exáctamente solo en los puntos fijos. Es importante señalar que para entornos lo suficientemente cercanos al punto de aumento de simetría, los estados que continuamente se vuelven livianos deden aparecer en la acción con los acoplamientos correspondientes, como fue mostrado en el Capítulo anterior.

La acción resultante, en términos de los campos  $A_\mu(x, \mathbb{Y})$  y  $M_{\mathcal{I}}(x, \mathbb{Y})$ , requiere una no-conmutatividad en los campos introducida via una no-conmutatividad en las coordenadas compactas usando un producto “estrella”  $\star$  en ellas [2–4]. Este no es un detalle menor, más bien es *fundamental* para todo lo realizado aquí. Es bien sabido que una compactificación tipo KK usual en un toro *no* producirá grupos de gauge no-Abelianos, ya que los términos de tres campos de gauge tienen constantes de estructura antisimétrica y estas en cuerdas proviene de los cociclos. Tal no-conmutatividad puede ser conseguida, como probaremos más adelante con el producto  $\star$ . Éste fue motivado en trabajos [2–4] para justamente explicar la presencia de los cociclos en cuerdas y dar una manera específica de como incorporarlos en una teoría de campos. Además tiene un impacto fundamental para DFT: propone que las coordenadas internas *no conmutan*. Su importancia es tal, que le dedicaremos una sección entera a su construcción y motivación.

En conclusión, tal acción nos provee una *interpolación* efectiva entre teorías en distintos puntos. Recordemos nuevamente que el aumento de simetría en DFT puede ser descripto utilizando un aumento del espacio tangente (compacto)[27, 28, 44–46] en cada punto fijo. En cambio, aquí la variedad compacta es siempre un Toro doble  $r$  dimensional y el aumento del tangente en [27, 28, 44–46] se traduce en modos de Fourier asociados a campos que “serán no-masivos en tal punto”. Otra cosa que vale la pena resaltar es que la no-conmutatividad mencionada puede ponerse en equivalencia con el uso de cociclos en Teoría de Cuerdas.

Este Capítulo está organizado de la siguiente manera: En la Sección siguiente explicaremos de donde proviene en cuerdas el misterioso producto  $\star$ . En la Sección 5.3, introducimos la propuesta para la acción en  $D = d + 2r$  dimensiones. En la Sección 5.4 realizamos la expansión en modos GKK y analizamos las diferentes contribuciones. La Sección 5.5 trata con el contenido físico de la acción: masas, bosones de Goldstone, aumento-ruptura de simetrías de gauge, etc. Un ejemplo ilustrativo de compactificación ( $r = 2$ ) es discutido. Finalmente en

la Sección 5.6, un resumen y discusión de las limitaciones y posibles extensiones del presente trabajo son expuestas.

## 5.2. La No-Conmutatividad de los modos Cero

Veamos cómo surge en cuerdas la idea de no conmutatividad, al menos en el caso simple de la cuerda Bosónica <sup>1</sup>. Comencemos tomando la cuerda con una dirección compactificada en un círculo  $X(\tau, \sigma) = X_R(\tau + \sigma) + X_L(\tau - \sigma)$ , con

$$\begin{aligned} X_L(\tau - \sigma) &= x_L + \frac{\alpha'}{2} p_L(\tau - \sigma) + i\lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} \alpha_m e^{-im(\tau - \sigma)} \\ X_R(\tau - \sigma) &= x_R + \frac{\alpha'}{2} p_R(\tau + \sigma) + i\lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} \tilde{\alpha}_m e^{-im(\tau + \sigma)} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

donde  $\lambda = \sqrt{\frac{\hbar\alpha'}{2}}$ , los momentos Left y Right vienen definidos en términos del winding y del momento compacto  $(\tilde{p}, p) = (\frac{p_R - p_L}{2}, \frac{p_R + p_L}{2})$ .

La coordenada T-dual es

$$\tilde{X}(\tau, \sigma) = X_R(\tau + \sigma) - X_L(\tau - \sigma) \quad (5.2.2)$$

Supongamos que hemos cuantizado canónicamente, luego esto nos da una cuantización para cada uno de los modos que aparecen en el desarrollo de la  $X(\tau, \sigma)$  salvo para los modos cero  $(x, \tilde{x})$  (los centros de “masa” de la cuerda y su dual). Vamos a ver ahora, que pidiendo algunas condiciones físicas obtendríamos que tales modos cero no conmutan necesariamente.

### Causalidad

Empecemos por la manera más fácil, analizando la *causalidad*. Tomemos un par de campos separados espacialmente en la hoja mundo, pero no cualesquiera par, sino nada más y nada menos que a  $X(\tau, \sigma)$  y  $\tilde{X}(\tau, \sigma)$ . Al ser ellos campos en principio independientes, uno podría pensar que deberían conmutar

$$\begin{aligned} [\hat{X}(\tau, \sigma_1), \hat{\tilde{X}}(\tau, \sigma_2)] &= [\hat{x}, \hat{\tilde{x}}] + \alpha'[\hat{x}, \hat{p}]\sigma_2 + \alpha'[\hat{p}, \hat{\tilde{x}}]\sigma_1 \\ &\quad + \lambda^2 \sum_{m, n \neq 0} \frac{1}{mn} e^{-i(m+n)\tau} \left[ [\hat{\alpha}_m, \hat{\alpha}_n] e^{im\sigma_1 + in\sigma_2} - [\hat{\tilde{\alpha}}_m, \hat{\tilde{\alpha}}_n] e^{-im\sigma_1 - in\sigma_2} \right] \\ &= [\hat{x}, \hat{\tilde{x}}] - 2i\lambda^2 \left[ \sigma_{12} + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\sigma_{12}}}{in} \right] \\ &= 2i\lambda^2 \left( \frac{\pi}{2i\lambda^2} [\hat{x}, \hat{\tilde{x}}] - \theta(\sigma_{12}) \right). \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

<sup>1</sup>Para un mayor desarrollo del tema ver [2–4]



donde la función  $\theta(\sigma)$  es la función escalón con intervalo  $(0, 2\pi)$ . Como estamos trabajando siempre en dicho intervalo la función escalón resulta  $\theta(\sigma) \equiv \pi$  en él. Vemos entonces, que si los modos cero  $(x, \tilde{x})$  no conmutan entonces hay causalidad siempre que resulte

$$[\hat{x}, \hat{\tilde{x}}] = 2i\lambda^2\pi \quad (5.2.4)$$

es decir, la no conmutatividad ocurre a la escala de  $\alpha'$  y transforma al espacio doble en no-conmutativo.

Una forma de ver autoconsistencia en este planteo es recordar que  $\tilde{X}$  está relacionada con  $X$  via la dualidad electromagnética en dos dimensiones, i.e.  $dX = *d\tilde{X}$  y notar que ya que  $[\hat{x}, \hat{\tilde{x}}]$  da lugar a una constante en  $[\hat{X}(\tau, \sigma_1), \hat{\tilde{X}}(\tau, \sigma_2)]$ , puede ser interpretado como una constante de integración y obtenido por integración del conmutador de cuantización canónica

$$[\hat{X}(\tau, \sigma_1), \partial_\tau \hat{X}(\tau, \sigma_2)] = [\hat{X}(\tau, \sigma_1), \partial_\sigma \hat{\tilde{X}}(\tau, \sigma_2)] = 2\pi i \hbar \alpha' \delta(\sigma_{12}), \quad (5.2.5)$$

con respecto a  $\sigma_2$ , pero el único valor para esta constante de integración consistente con causalidad es  $\pi\alpha'\hbar$ .

En conclusión, la no-conmutatividad de los modos cero  $(x, \tilde{x})$  aparece como una condición necesaria para la causalidad entre el campo de la cuerda y su dual. Más aún, tal no-conmutatividad transforma al espacio doble en un espacio no conmutativo, donde la escala fundamental es la de la cuerda  $\alpha'$ . Tal efecto debería ser tenido en cuenta en DFT para una completa descripción de la misma.

### La estructura del espacio Doble

Analicemos que consecuencias (o posibles rederivaciones) de la no-conmutatividad pueden aparecer. Suele decirse que el conmutador entre los modos cero  $(x, \tilde{x})$  no tienen mucha relevancia pues tanto  $X(\tau, \sigma)$  como  $\tilde{X}(\tau, \sigma)$  no son campos bien definidos en la CFT, en cambio sus derivadas si lo son, y en ellas los modos cero ya no aparecen. Pero si entramos un poco más en los detalles de la teoría vemos que el modo cero si es relevante en la construcción de operadores vértices de la forma  $e^{ik \cdot X}$  (tipo taquiónicos).

En [2] puede encontrarse un cálculo detallado donde se muestra que el factor de cociclo puede ser removido de la Teoría de Cuerdas si exáctamente el conmutador (5.2.4) es tenido en cuenta. Vale enfatizar que, pueden considerarse en principio, como dos alternativas para cuantizar la teoría de manera equivalente pero ésta última sin cociclos nos es de particular interés por sus implicaciones en DFT.

Varias veces se ha sugerido que los cociclos juegan un papel importante en la construcción de DFT, pero si tomamos la cuerda cuantizada con (5.2.4), entonces los cociclos ya no son un problema y sus efectos debería ser incorporado a DFT via (5.2.4). Como DFT, es una teoría de campos construida justamente en un espacio tiempo doble  $(x, \tilde{x})$ , entonces para incorporar dichos efectos bastaría con trasformarla en una teoría de campos *no-conmutativa*, donde tal no-conmutatividad viene dada por (5.2.4). En resumen, el espacio de DFT debe tener una estructura no-conmutativa que hasta ahora no se habían tenido en cuenta para el desarrollo.

Es bien sabido, que para transformar una teoría de campos conmutativa en no-conmutativa basta reemplazar el producto entre campos por el bien conocido *producto de Moyal*. Analicemos un poco como hacerlo en general y veamos su implementación explícita a nuestro caso en DFT.

Sean  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$  dos campos definidos en un espacio-tiempo  $x_\mu$  no-conmutativo dado por

$$[x_\mu, x_\nu] = \alpha \theta_{\mu\nu} \quad (5.2.6)$$

donde  $\theta_{\mu\nu}$  es antisimétrico  $\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$  y  $\alpha$  es algún parámetro que caracteriza la escala a la cuál ocurre la no-conmutatividad. Entonces la teoría de campos que tenga en cuenta la no-conmutatividad debe ser construida via un producto  $\star$  definido como

$$\phi_1(x) \star \phi_2(x) = e^{\alpha \theta_{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu} (\phi_1(x) \phi_2(x)). \quad (5.2.7)$$

Varias cosas deben ser explicadas: el  $\otimes$  indica que la derivada de la izquierda debe ser aplicada al campo  $\phi_1$  mientras que la derivada de la derecha debe ser aplicada al campo  $\phi_2$ . Para ganar intuición, veamos un ejemplo de como utilizarlo y desarrollemos el producto en potencias de  $\alpha$ :

$$\phi_1(x) \star \phi_2(x) = \phi_1(x) \phi_2(x) + \alpha \theta_{\mu\nu} \partial_\mu \phi_1(x) \partial_\nu \phi_2(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (5.2.8)$$

Vemos entonces que a orden cero en  $\alpha$  el producto Moyal es un producto usual de teoría de campos, mientras que a mayores órdenes (en energía) éste se corrige. Esta forma de introducir la no-conmutatividad se denomina cuantización de Weyl (para mayores referencias ver [47]).

Aplicando esto a nuestro caso (5.2.4), deberíamos introducir en DFT un producto de la forma

$$\phi_1(x, \tilde{x}) \star \phi_2(x, \tilde{x}) = e^{i\pi\alpha' \tilde{\partial} \otimes \partial} (\phi_1(x, \tilde{x}) \phi_2(x, \tilde{x})). \quad (5.2.9)$$

Tal producto solo aplicaría a las coordenadas compactificadas, ya que las externas son conmutativas. Veremos más adelante, que esta fase es exáctamente la necesaria para producir las constantes de estructura de los grupos de aumento de simetría no-Abelianos<sup>2</sup>.

Si en lugar de compactificar una única coordenada decidimos compactificar más a un Toro, entonces obtendríamos

$$[\hat{x}^m, \hat{x}_n] = 2i\lambda^2 \pi \delta_n^m \quad (5.2.10)$$

donde los índices de las coordenadas recorren las direcciones compactas y la  $\delta_n^m$  es la delta usual.

Terminemos esta sección enfatizando que esta visión de la Teoría de Cuerdas, donde los modos cero de coordenadas no conmutan, permite reinterpretar los cociclos y por lo tanto dar una manera de introducir su efecto en DFT. Como en el fenómeno de aumento de simetría los cociclos jugaban un rol fundamental, se puede inferir que esta no-conmutatividad en DFT tendrá el poder de producir dicho fenómeno cuerdoso. En la sección que sigue veremos como incorporar la no-conmutatividad para poder producir un Lagrangiano (del estilo DFT) de-

<sup>2</sup>Notar que esta fase coincide con la fase que aparece al conmutar cociclos en cuerdas si las derivadas son transformadas a Fourier, i.e.  $(\partial, \tilde{\partial}) \rightarrow (p, \tilde{p})$

pendiente de los módulos que pueda reproducir el aumento de simetría a medida que éstos cambien.

### 5.3. La Acción Efectiva

En esta sección presentamos una acción efectiva de teoría de campos dependiente de los módulos que capta las características esenciales del aumento de simetría en compactificaciones toroidales de la cuerda Heterótica. La motivación, como ya se ha mencionado, es unificar los anteriores resultados en una única forma que cubra todos los posibles casos para los valores de los módulos. Al hacer esto, habremos logrado una teoría de campos que logra incorporar, no solo una relajación del SC, sino un efecto característico de la cuerda, i.e. el aumento de simetría. La notación y convenciones están introducidos aquí.

Comencemos recordando que estamos trabajando en la cuerda Heterótica (para poder tener aumento de simetría) compactificada en un Toro. Fijemos convención y denotemos con  $\Phi \equiv (g, B, A)$  a un punto del espacio de módulos, el cual codifica los background the métrica  $g$ , del campo  $B$  y de los valores de las líneas de Wilson  $A$ . En un punto fijo de este espacio, el grupo de gauge de la Heterótica es de la forma  $G_L \times U(1)_R^{r_L}$ . El rango de  $G_L$  es  $r_L = r + 16 = 26 - d$  originado por los 16 generadores Cartanes del grupo de gauge de la Heterótica en diez dimensiones más los  $r = 10 - d$  vectores bosónicos provenientes de las combinaciones Left de la reducción KK de la métrica y el tensor antisimétrico. Por lo tanto, la dimensión del grupo de gauge es  $\dim G_L = n_c + r_L$  donde  $n_c$  denota el número de generadores cargados. Estos generadores corresponden a los vértices de cuerdas que contienen momento KK y windings, asociados generalmente con campos masivos que se vuelven no-masivos en el punto fijo. Estos campos juegan un papel central en nuestra discusión. Resaltemos que  $n_c$  depende del punto del espacio de módulos en cuestión, y que en puntos genéricos no hay ningún aumento de simetría ( $n_c = 0$ ) por lo que el grupo de gauge es  $U(1)_L^{r_L} \times U(1)_R^{r_L}$ .

En Capítulos anteriores hemos visto que la acción efectiva de bajas energías para el sector bosónico de la cuerda Heterótica en un punto fijo  $\Phi_0$  con grupo de gauge  $G_L \times U(1)_R$  es, a tercer orden en los campos,

$$\begin{aligned}
S_{het}(\Phi_0) = & \int d^d x \sqrt{g} \left[ e^{-2\varphi} \left( R + 4\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right) \right. \\
& - \frac{1}{4} \left( F_{A\mu\nu} F_{\mu\nu}^A + \bar{F}_{\bar{J}}^{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}^{\bar{J}} - 2g_d \sqrt{\alpha'} M_{A\bar{I}} F_{\mu\nu}^A \bar{F}^{\bar{I}\mu\nu} \right) \\
& \left. - \frac{1}{4} D_\mu M_{A\bar{I}} D_\nu M^{A\bar{I}} g^{\mu\nu} + \mathcal{O}(M^4) \right]. \tag{5.3.1}
\end{aligned}$$

donde  $\bar{I}$  son índices Right correspondientes a grupo Abelian Right  $U(1)_R^{r_L}$  mientras que  $A$  corre en el grupo Left  $G_L$ . Tenemos además que

$$F^B = dA^B + \frac{g_d}{2} f_{CD}^B A^C \wedge A^D, \quad F^{\bar{I}} = dA^{\bar{I}} \tag{5.3.2}$$

$$D_\mu M_{A\bar{I}} = \partial_\mu M_{A\bar{I}} + g_d f_{SA}^K A_{L\mu}^S M_{K\bar{I}}, \tag{5.3.3}$$

donde los campos escalares  $M_{A\bar{I}}$  viven en la representación adjunta  $(\mathbf{dim} \mathbf{G}_L)_{\bar{\mathbf{q}}=0}$  de  $G_L$  y llevan cero carga vectorial  $\bar{\mathbf{q}} = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_r) = 0$  con respecto al  $U(1)_R^r$ .  $H$  es el tensor de esfuerzos del campo  $B$  (con interacciones tipo Chern-Simons) definido como

$$H = dB + F^B \wedge A_B, \quad (5.3.4)$$

$\varphi$  es el campo del dilatón y  $R$  el escalar de curvatura.

Como ya fue mencionado arriba, los términos en esta expresión correspondientes con campos cargados cambiarán cuando uno se mueva por el espacio de módulos, mientras que términos asociados con los “Cartanes” originados en la reducción de campos en 10D estarán siempre presentes.

Para contruir nuestra acción que interpole entre distintos puntos del espacio de módulos, resulta pedagógico separar contribuciones de cargados y Cartanes en (5.3.1). Intuitivamente hacemos esto porque tales contribuciones provienen de grados de libertad con distinta LMC y serán incorporados como modos de Fourier de campos diferentes. Por lo tanto reescribiremos la acción de arriba (5.3.1) como

$$\begin{aligned} S_{het}(\Phi_0) = & \int d^d x \sqrt{g} e^{-2\varphi} \left[ \left( R + 4\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right) \right. \\ & - \frac{1}{4} \left( \delta_{\hat{I}\hat{J}} F^{\hat{I}\mu\nu} F_{\mu\nu}^{\hat{J}} + \delta_{\bar{I}\bar{J}} \bar{F}^{\bar{I}\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}^{\bar{J}} - 2g_d \sqrt{\alpha'} M_{\hat{I}\bar{I}} F_{\mu\nu}^{\hat{I}} \bar{F}^{\bar{I}\mu\nu} + \frac{1}{4} D_\mu M_{\hat{I}\bar{I}} D_\nu M^{\hat{I}\bar{I}} g^{\mu\nu} \right) \\ & \left. - \frac{1}{4} \left( F_{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu}^\alpha \frac{1}{4} + D_\mu M_{\alpha\bar{I}} D_\nu M^{\alpha\bar{I}} g^{\mu\nu} - 2g_d \sqrt{\alpha'} M_{\alpha\bar{I}} F_{\mu\nu}^\alpha \bar{F}^{\bar{I}\mu\nu} \right) + \mathcal{O}(M^4) \right]. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Hemos introducido muchos índices y es necesario aclararlos detalladamente para evitar confusión:

- $\bar{I} = 1, \dots, r$  son índices Right que indexan al grupo  $U(1)_{\bar{I}}$  asociados a los vectores Right  $\bar{A}_{\mu}^{\bar{I}}$ ,
- Los índices Left  $A$  han sido convenientemente expandidos en  $A = (\hat{I}, \alpha)$  donde:
- $\alpha = 1, \dots, n_c$  indexan generadores cargados del grupo de gauge Left, correspondientes con vectores  $A_\mu^\alpha$ . Estos corresponden a las raíces del álgebra en la base de Cartan-Weyl.
- $\hat{I} \equiv (i, I)$  son índices “Cartan” Left separados en término de los índices compactos Left  $i = 1 \dots r$  y  $I = 1 \dots 16$  índices de las coordenadas Left puramente Heteróticas. Los  $A_\mu^{\hat{I}}$  corresponden a los vectores Left tipo Cartan.

Los tensores de esfuerzos introducidos en (5.3.2) se expanden ahora com

$$F_{\mu\nu}^{\hat{I}} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^{\hat{I}} + ig \sum_\alpha f_{\alpha\beta}^{\hat{I}} A_{[\mu}^\alpha A_{\nu]}^\beta \quad F_{\mu\nu}^{\bar{J}} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^{\bar{J}} \quad (5.3.6)$$

para campos Cartan, mientras que

$$F_{\mu\nu}^{\alpha} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}^{\alpha} + igf^{\alpha}_{\beta\gamma}A_{[\mu}^{\beta}A_{\nu]}^{\gamma} + igf^{\alpha}_{\beta\hat{I}}A_{[\mu}^{\beta}A_{\nu]}^{\hat{I}} \quad (5.3.7)$$

para los cargados<sup>3</sup>. Análogamente, para los campos escalares tenemos que

$$D_{\mu}M_{\hat{I}\bar{J}} = \partial_{\mu}M_{\hat{I}\bar{J}} + igdf_{\beta\hat{I}}^{\alpha}A_{\mu}^{\beta}M_{\alpha\bar{J}} \quad (5.3.8)$$

$$D_{\mu}M_{\alpha\bar{J}} = \partial_{\mu}M_{\alpha\bar{J}} + igdf_{\alpha\beta}^{\hat{I}}M_{\hat{I}\bar{J}}A_{\mu}^{\beta} + igdf_{\alpha\beta}^{\lambda}M_{\lambda\bar{J}}A_{L\mu}^{\beta} + igdf_{\alpha\hat{I}}^{\beta}M_{\beta\bar{J}}A_{\mu}^{\hat{I}}, \quad (5.3.9)$$

donde una suma sobre índices repetidos tipo raíz está implícita. Estamos usando una base de Cartan-Weyl de tal manera que  $f_{\alpha\beta}^{\gamma} = f_{\alpha\beta(-\gamma)} = 1$  (con  $\gamma = \alpha + \beta$ ) y  $f_{\beta\alpha}^{\hat{I}} = f_{-\alpha\alpha}^{\hat{I}} = f_{\alpha-\alpha\hat{I}} = \alpha^{\hat{I}}$  (ojo, no hay suma sobre  $\alpha$  aquí) etc. Además, los índices cargados son contraídos con la correspondiente métrica de Cartan-Killing mientras que los índices tipo Cartan son contraídos con la delta usual.

Finalmente, resulta útil y aún más pedagógico, realizar una rescritura más de la anterior (con el fin de hacer contacto con el lenguaje de DFT) reagrupando los índices Cartan, tanto Left como Right, en un único índice generalizado  $\mathcal{I} = (\hat{I}, \bar{I})$ , el cual es una representación vectorial del grupo de dualidad  $O(r_l, r)$ . Los índices  $\mathcal{I}$  son contraídos con la métrica invariante de  $O(r_L, r)$  que se expresará genéricamente en la base L-R (también conocida como  $C$ -base) como

$$\eta_C^{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 1_{16+r} & 0 \\ 0 & -1_r \end{pmatrix}. \quad (5.3.10)$$

Para tener una formulación covariante en esta base, introducimos los vectores generalizados  $A_{\mu}^{\mathcal{I}} = (A_{\mu}^{\hat{I}}, A_{\mu}^{\bar{I}})$  que incorporan los campos vectoriales Left y Right tipo Cartan respectivamente. Si quisieramos hacer lo mismo para los escalares nos topáramos con un problema: no existe el escalar tipo Left  $M_{\alpha J}$ . Podemos esquivar este inconveniente y definir de todos modos los escalares  $M_{\alpha\mathcal{J}} = (0, M_{\alpha\bar{J}})$  donde las componentes Left fueron “proyectadas”. Discutiremos esta proyección abajo en (5.3.27) y es bastante importante aclarar que esta proyección no entra en conflicto con la T-dualidad.

También, inspirados en DFT [44] introducimos una métrica  $O(r_l, r)$  generalizada  $\mathcal{H}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$  y la expandimos en fluctuaciones alrededor de un background plano como

$$\mathcal{H}^{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \delta^{\mathcal{I}\mathcal{J}} + \mathcal{H}^{(1)\mathcal{I}\mathcal{J}} + \frac{1}{2}\mathcal{H}^{(2)\mathcal{I}\mathcal{J}} + \dots \quad (5.3.11)$$

donde los elementos matriciales son nulos a menos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\hat{I}\bar{J}}^{(1)} &= -M_{\hat{I}\bar{J}}, & \mathcal{H}_{\bar{I}\hat{J}}^{(1)} &= -M_{\bar{I}\hat{J}}^T \\ \mathcal{H}_{\hat{I}\hat{J}}^{(2)} &= (MM^T)_{\hat{I}\hat{J}}, & \mathcal{H}_{\bar{I}\bar{J}}^{(2)} &= (M^T M)_{\bar{I}\bar{J}}. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

<sup>3</sup>Aquí se usa la convención  $2A_{[\mu}B_{\nu]} = A_{\mu}B_{\nu} - B_{\nu}A_{\mu}$ .

En términos de estas nuevas definiciones y quedandonos con términos hasta segundo orden en sus fluctuaciones, la acción <sup>4</sup> puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}
S_{eff}(\Phi_0) = & \int d^d x \sqrt{g} e^{-2\varphi} \left[ \left( R + 4\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right) \right. \\
& - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} F^{\mathcal{I}\mu\nu} F_{\mu\nu}^{\mathcal{J}} + \frac{1}{8} D_\mu \mathcal{H}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} D^\mu \mathcal{H}^{\mathcal{I}\mathcal{J}} \\
& \left. - \frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F^{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{4} D_\mu M_{\alpha\mathcal{I}} D^\mu M^{\alpha\mathcal{I}} - \frac{1}{2} g_d \sqrt{\alpha'} M_{\alpha\mathcal{I}} F_{\mu\nu}^\alpha \bar{F}^{\mathcal{I}\mu\nu} \right].
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Las diferentes contribuciones a la acción de arriba se leen de las amplitudes de tres puntos entre vértices de estados no masivos de la cuerda Heterótica. Hay tantos grados de libertad e índices que uno puede estar bastante confundido a esta altura, por lo tanto, por una cuestión de didáctica para facilitar la notación, vale la pena familiarizarnos con los estados involucrados. Por esto mostramos la siguiente tabla en la cual se muestran los vértices de cuerdas que representan a los grados de libertad involucrados en la acción anterior y sus propiedades.

Modos	$\mathbb{L}^2$	$N$	Operadores de Vértice
$g_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})}, b_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})}, \phi^{(\mathbb{L})}$	0	1	$\partial_z X^\mu \tilde{\psi}^\nu(z) e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}(z)} e^{iK \cdot X(z)}$
$A_\mu^{\tilde{I}(\mathbb{L})}$	0	1	$\partial_z X^\mu \tilde{\psi}_{\tilde{I}}(z) e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}(z)} e^{iK \cdot X(z)}$
$A_\mu^{\hat{I}(\mathbb{L})}$	0	1	$\partial_z Y_I \tilde{\psi}^\mu(z) e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}(z)} e^{iK \cdot X(z)}$ $\partial_z Y_m \tilde{\psi}^\mu(z) e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}(z)} e^{iK \cdot X(z)}$
$M_{\tilde{I}\tilde{I}}^{(\mathbb{L})}$	0	1	$\partial_z Y^I \tilde{\psi}^{\tilde{I}}(z) e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}(z)} e^{iK \cdot X(z)}$ $\partial_z Y^m \tilde{\psi}^{\tilde{I}}(z) e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}(z)} e^{iK \cdot X(z)}$
$A_\mu^{(\mathbb{L})}$	2	0	$\tilde{\psi}^\mu(z) e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}(z)} e^{iK \cdot X(z)}$
$M_{\tilde{I}}^{(\mathbb{L})}$	2	0	$\tilde{\psi}^{\tilde{I}}(z) e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}(z)} e^{iK \cdot X(z)}$

**Tabla 5.1:** Modos, LMC, número de osciladores y su correspondiente operador de vértice. En todos los casos considerados aquí  $\bar{N} = \bar{N}_F + \bar{N}_B - \frac{1}{2} = 0$ .

Los operadores de vértice en cuerdas generalmente contienen un factor interno (ver Apéndice C.1 para la notación)

$$e^{i\mathbb{L} \cdot (\tilde{\mathbb{P}})(\Phi) \cdot \mathbb{Y}(z)} = e^{i\tilde{l}_L^{(\tilde{\mathbb{P}})} \cdot y_L(z) + i\tilde{l}_R^{(\tilde{\mathbb{P}})} \cdot y_R(z)} \tag{5.3.14}$$

<sup>4</sup>Notar que no hay potencial escalar. Las interacciones entre escalares aparecen recién a cuarto orden en fluctuaciones cuando solo se consideran los estados no masivos.

donde  $\mathbb{L}^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi) = (l_L^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi), l_R^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi))$  es el momento generalizado<sup>5</sup> (ver (C.1.1)) el cual depende de los windings  $\tilde{p}^m$ , momentos KK  $p_m$  y  $\Lambda_{16}$  pesos  $P^I$ , que a su vez organizamos en un momento de Kaluza-Klein generalizado (GKK)

$$\check{\mathbb{P}} \equiv (P^I, p_m, \tilde{p}^m), \quad (5.3.15)$$

y en los valores de los módulos  $\Phi$ . Los momentos generalizados deben satisfacer la condición LMC

$$\frac{1}{2}\mathbb{L}^2 = \frac{1}{2}l_L^2 - \frac{1}{2}l_R^2 = \tilde{p} \cdot p + \frac{1}{2}P^2 = (1 - N + \bar{N}). \quad (5.3.16)$$

En todos los casos considerados aquí  $\bar{N} = 0$  y  $N = 0, 1$ . Los operadores de vértice con  $N = 1$  corresponden a reducciones KK de la métrica, del campo  $B$ , del dilatón y de los vectores de la Heterótica en 10 dimensiones.

Para ser más precisos, los vectores tipo Cartan  $A_\mu^{\hat{I}}$  se originan en los vértices de la métrica y el tensor antisimétrico luego de una reducción KK de la forma

$$V(\hat{I}, \mathbb{L}) \propto A_\mu^{\hat{I}(\mathbb{L})}(K) \partial_z Y_{\hat{I}} \tilde{\psi}^\mu e^{i\mathbb{L}^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi) \cdot \mathbb{Y}(z)} e^{iK \cdot X(z)} \quad (5.3.17)$$

donde  $K^\mu$  es el momento del espacio tiempo no compacto. Debido a la presencia de osciladores  $\partial_z Y^{\hat{I}}$ ,  $N = 1$  y por lo tanto, la LMC (5.3.16) se lee

$$\mathbb{L}^2 = 0. \quad (5.3.18)$$

Este requerimiento es trivialmente satisfecho por los estados no masivos correspondientes a  $\mathbb{L} \equiv l_L = l_R = 0$  (sin windings ni momento KK), tal es el caso de los vectores tipo Cartan  $A_\mu^{\hat{I}} \equiv A_{\mu\hat{I}}^{(0)}$ .

Por otro lado, los vectores cargados tipo Left vienen de vértices

$$V(\mathbb{L}) \propto A_\mu^{(\mathbb{L})}(K) \tilde{\psi}^\mu(z) e^{i\mathbb{L}^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi) \cdot \mathbb{Y}(z)} e^{iK \cdot X(z)} \quad (5.3.19)$$

con una LMC

$$\frac{1}{2}\mathbb{L}^2 = 1 \quad (5.3.20)$$

ya que  $N = 0$ . Los otros casos de la Tabla 1 se entienden de manera similar. Vale resaltar que factores tales como fantasmas o cociclos deben ser incluidos.

En un punto fijo  $\Phi_0$  y para valores específicos de momento y winding (i.e., para valores específicos de  $\check{\mathbb{P}}$ )

$$l_R^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi_0) = 0 \quad l_L^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi_0) = \alpha^{(\check{\mathbb{P}})} \quad \text{with} \quad \frac{1}{2}\alpha^{(\check{\mathbb{P}})^2} = 1 \quad (5.3.21)$$

los estados se vuelven no-masivos (ver C.1.6) y  $l_L^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi_0)$  se transforman en las raíces  $\alpha^{(\check{\mathbb{P}})}$

---

<sup>5</sup>generalmente escribiremos  $\mathbb{L} \equiv \mathbb{L}^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi)$  y omitiremos escribir la dependencia explícita en  $\check{\mathbb{P}}$  y  $\Phi$  para alivianar la notación.

del algebra del nuevo grupo de gauge aumentado<sup>6</sup>. Hablando en general, en otro punto fijo diferente, otro conjunto de  $\check{\mathbb{P}}'$  dará (5.3.21), dando lugar a un grupo de gauge aumentado diferente. Denotaremos a este conjunto de  $n_c$  modos GKK, que satisfacen (5.3.20), como

$$\check{G}(\Phi_0)_{n_c} = \{\check{\mathbb{P}} \equiv (P^I, p_m, \tilde{p}^m) : l_R^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi_0) = 0 \text{ (thus } l_L^{(\check{\mathbb{P}})}(\Phi_0) = \alpha^{(\check{\mathbb{P}})}, m^2 = 0)\}. \quad (5.3.22)$$

Es decir,  $\check{G}(\Phi_0)_{n_c}$  codifica los  $n_c$  “campos cargados quee serán no-masivos en un punto fijo  $\Phi_0$ ”. En  $\Phi_0$ , y para  $\check{\mathbb{P}} \in \check{G}(\Phi_0)_{n_c}$  los  $A_\mu^{(\check{\mathbb{P}})}(K)$  dan lugar a vectores cargados  $A_\mu^\alpha(x)$  en la acción de arriba (similar con escalares cargados).

Como fue dicho en la Introducción el principal objetivo de este Capítulo es dar una teoría de campos que dependa de los valores de los módulos de tal manera que de una descripción del efecto del aumento de simetría de gauge a medida que los valores de los módulos son cambiados continuamente. Es decir, dar una teoría de campos que dependiendo de los módulos produzca un aumento o una ruptura de simetría pudiendo reproducir todos los posibles casos que aparecen en cuerdas.

Para poder hacerlo, proponemos considerar una especie de expansión de Kaluza-Klein generalizada en momentos generalizados  $\mathbb{L}$  de los diferentes campos que se ven involucrados en los procesos de aumento de simetría. La expansión no se hace de cualquier manera, sino que se hace respetando la LMC. Es decir, los grados de libertad que vienen de un mismo tipo de operador de vértice (con número de osciladores determinado) serán los que aparezcan en la suma del desarrollo de Fourier. Los modos GKK en esta expansión son identificados con la polarización de un correspondiente operador de vértice. A saber, para describir vectores cargados introducimos la expansión

$$A_\mu(x, \mathbb{Y}) = \sum_{\check{\mathbb{P}}}^I A_\mu^{(\mathbb{L})}(x) e^{i\mathbb{L}_X \mathbb{Y}^X} = \sum_{\mathbb{L}} A_\mu^{(\mathbb{L})}(x) e^{i\mathbb{L}_L \cdot y_L + i\mathbb{L}_R \cdot y_R} \delta\left(\frac{1}{2}\mathbb{L}^2, 1\right) \quad (5.3.23)$$

donde  $A_\mu^{(\mathbb{L})}(x)$  se corresponde a la polarización en (5.3.19). La prima en la suma indica que la LMC (5.3.20) debe ser impuesta (con un abuso de notación indicamos la suma en el índice  $\check{\mathbb{P}}$  con  $\mathbb{L}$ ). Vale recordar que genéricamente la suma contiene un número infinito de términos incluso siendo la LMC muy constreñida.

Una manera, quizás más intuitiva de pensar el porque meter a todos los grados de libertad con una misma LMC (y además mismo número de osciladores) como modos GKK es la siguiente: Tomemos a los grados de libertad  $A_\mu^{(\mathbb{L})}(x)$ , al ser vectores se los puede pensar como una 1-forma  $A^\mathbb{L} = A_\mu^{(\mathbb{L})}(x) dX^\mu$ . Ahora podemos hacerle un pullback a esta forma para llevarla a una forma en la hoja mundo

$$A^\mathbb{L} = A_\mu^{(\mathbb{L})}(x) dX^\mu = A_\mu^{(\mathbb{L})}(x) \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) d\bar{z} = \sum_K \epsilon_{K\mu}^\mathbb{L} e^{iK \cdot X} \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) d\bar{z} \quad (5.3.24)$$

donde en la última igualdad se ha trasformado Fourier en el espacio-tiempo. Ahora, si miramos

---

<sup>6</sup>De la misma manera que los operadores,  $e^{il_L^{(\check{\mathbb{P}})} \cdot Y(z)} \rightarrow J_{\alpha^{(\check{\mathbb{P}})}}$  son los generadores cargados del algebra.



los vértices de estos modos (en la bosónica para poder comparar) veríamos que son de la forma

$$\epsilon_{K\mu}^{\mathbb{L}} e^{iK \cdot X} \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}} \quad (5.3.25)$$

es decir, como si fuesen el pullback del grado de libertad  $A_\mu(x, \mathbb{Y})$ , donde por ser vértices la suma en momentos  $K$  y  $\mathbb{L}$  no aparece (trivialmente, ya que las partículas son estados con momento definido).

Habiendo quedado clara la idea que los grados de libertad provenientes de un mismo vértice se identificarán con los modos GKK de un campo, proseguiremos con el análisis.

Genéricamente hablando, si la masa de los GKK  $A_\mu^{(\mathbb{L})}(x)$  fuese dada por la fórmula de masa de la cuerda (C.1.6), como mostraremos que es el caso, resultarían ser estos modos masivos. Sin embargo, al moverse continuamente por el espacio de módulos, para valores específicos  $\check{\mathbb{P}} \in \check{G}_{n_c}(\Phi_0)$ ,  $n_c$  vectores  $A_\mu^{(\mathbb{L})}(x) \equiv A_\mu^{\alpha(\check{\mathbb{P}})}(x)$  se volverán no-masivos y darán lugar a un grupo de gauge aumentado  $G_L$ <sup>7</sup>. De un modo similar introducimos la expansión GKK para los campos escalares asociándoles a los campos  $M_{\alpha\bar{I}}(x)$ , que provienen de operadores de vértice  $M_{\bar{I}}^{(\mathbb{L})}(K)$  (ver Table 1), modos en la expansión GKK

$$M_{\bar{I}}(x, \mathbb{Y}) = \sum_{\mathbb{L}} M_{\bar{I}}^{(\mathbb{L})}(x) e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}} \delta\left(\frac{1}{2}\mathbb{L}^2, 1\right). \quad (5.3.26)$$

Antes de seguir con las otras expansiones en modos, es momento de discutir la “proyección” Left que se mencionó arriba (sección Acción Efectiva), en la cual se definía formalmente un escalar con índice doble  $M_{\mathcal{I}}$ . Notemos que el campo Right  $M_{\bar{I}}$  puede ser embebido en un campo *restringido*  $M_{\mathcal{I}} = (M_{\hat{I}}, M_{\bar{I}})$  con índices de  $O(r_L, r)$  que cumpla

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}} M_{\mathcal{J}} &= 0 & P &= \frac{1}{2}(\eta + \mathcal{H}) \\ \bar{P}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}} M_{\mathcal{J}} &= M_{\mathcal{I}} & \bar{P} &= \frac{1}{2}(\eta - \mathcal{H}) \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

donde  $\mathcal{H}$  es la métrica generalizada que satisface  $\mathcal{H}\eta\mathcal{H} = \eta$  y  $P, \bar{P}$  son proyectores [48] que eliminan los grados de libertad  $r_L$ . De la primera ecuación obtenemos,

$$PM = \frac{1}{2}(\eta + \mathcal{H})M = \begin{pmatrix} (1 + MM^T)_{\hat{I}\hat{J}} + \dots & -M_{\hat{I}\bar{J}} + \dots \\ -(M^T)_{\bar{I}\hat{J}} + \dots & -(M^T M)_{\bar{I}\bar{J}} + \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{\hat{J}} \\ M_{\bar{J}} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.3.28)$$

donde los puntos suspensivos indican órdenes superiores en fluctuaciones. Por lo tanto  $M_{\hat{I}} = -M_{\hat{I}\bar{J}}M_{\bar{J}} + \dots$ . Vemos que los grados de libertad  $M_{\hat{I}}$  no son independientes y contribuyen a orden dos o más en fluctuaciones. Como se muestra abajo, éstos dan lugar a términos de orden cuártico en la acción. Como estamos trabajando en la construcción de una acción hasta tercer orden en fluctuaciones, podemos fijar  $M_{\mathcal{J}} = (0, M_{\bar{J}})$ .

Por una cuestión de consistencia, debemos además tener en cuenta expansiones tipo KK de campos originados en  $D = 10$  métrica, campo  $B$  y generadores tipo Cartan del grupo de

<sup>7</sup>Una condición de realidad  $A_\mu^{(\mathbb{L})*} = A_\mu^{(-\mathbb{L})}$  debe ser impuesta.

gauge de la Heterótica es decir, de  $G_{\mu\nu}(x, \mathbb{Y}), B_{\mu\nu}(x, \mathbb{Y}), A_\mu^{\mathcal{I}}(x, \mathbb{Y}), M^{\hat{I}\bar{J}}(x, \mathbb{Y})$ . Ahora bien, como los correspondientes modos (primeras cuatro filas en la Table 1) deben satisfacer la LMC (5.3.18) restringimos la suma solo a modos que obedecen esta condición. Es decir

$$A_\mu^{\mathcal{I}}(x, \mathbb{Y}) = \sum_{\mathbb{L}} A_\mu^{\mathcal{I}(\mathbb{L})}(x) e^{i\mathbb{L}\mathcal{I}\mathbb{Y}^{\mathcal{I}}} \delta(\mathbb{L}^2, 0). \quad (5.3.29)$$

Recordemos que estos modos corresponden a  $N = 1$  y, por lo tanto, solo los modos cero  $A_\mu^{\mathcal{I}(0)}(x) = A_\mu^{\mathcal{I}}(x) = (A_\mu^{\hat{I}}(x), A_\mu^{\bar{I}}(x))$  corresponden a campos no masivos. Estos son los vectores del grupo de gauge  $U(1)_L^{r_L} \times U(1)_R^{r_R}$  para un punto genérico del espacio de módulos. Las mismas consideraciones son válidas para los otros campos con  $N = 1$ . Entonces, por ej,  $G_{\mu\nu}(x)^{(0)} = G_{\mu\nu}(x)$  es la  $d$  métrica mientras que los modos distintos de cero describen gravitones masivos, etc. En la mayoría de las siguientes consideraciones solo los modos cero serán tenidos en cuenta.

Notar que un campo genérico, dependiente de los módulos,  $\phi(x, \mathbb{Y}) \equiv A_\mu(x, \mathbb{Y}), G_{\mu\nu}(x, \mathbb{Y}), \dots$  podría ser interpretado como un uplifting de un campo  $d$  dimensional a  $d + r + r_L$  dimensiones con  $r + r_L$  coordenadas periódicas<sup>8</sup>. Un Lagrangiano  $\mathcal{L}(x, \mathbb{Y})$  en términos de estos campos, cuando se integra sobre  $d + r + r_L$  dimensiones  $\int d^d x d\mathbb{Y} \mathcal{L}(x, \mathbb{Y}) = \int d^d x dy_L dy_R \mathcal{L}(x, \mathbb{Y})$  da lugar a una acción en  $d$  dimensiones espacio-tiempo luego de que las coordenadas periódicas son integradas, donde los campos físicos serían los modos GKK  $\phi(x)^{(\mathbb{L})}$ . La expectativa es que tal acción incluya la acción efectiva de bajas energías de la Heterótica (5.3.13) para los diferentes puntos fijos del espacio de módulos  $\Phi_0$ .

Ya se ha mencionado que algo crucial es cómo generar las constantes de estructura no-abelianas a través de estos campos, para dar lugar así a aumentos de simetría en los puntos fijos. Veremos que esta tarea es hecha por la incorporación del llamado “producto estrella” [2, 3], el cual denotamos por  $\star$ , dando lugar además a una no-conmutatividad que discutiremos en la sección 5.4. Como se ha mencionado, tal producto es motivado desde cuerdas: via una cuantización alternativa los cociclos pueden ser eliminados de la teoría y su efecto se traduce en una no-conmutatividad en el espacio doble de coordenadas. Tal no-conmutatividad se traduce en una teoría de campos, via la cuantización de Weyl, como un producto  $\star$  en los campos.

En lo que sigue presentamos la acción y, acto seguido, discutimos sus particularidades. Asumamos que podemos escribir una acción de campos de la Heterótica *completa*  $S_{het}(\Phi)$  calculando todas las posibles amplitudes de scattering. Tal acción debería incluir un número infinito de campos, llamemoslos  $\Phi_{\mu_1\mu_2\dots;\bar{N},N}(x, \mathbb{Y})$ , con todos los posibles spines y números de osciladores  $\bar{N}, N$  que pueden ser expandidos en modos con su correspondiente LMC, i.e.  $\frac{1}{2}\mathbb{L}^2 = 1 - (N - \bar{N})$ . Entre todas estas contribuciones aislamos la parte de la acción, que llamaremos  $S_{enh}(\Phi)$ , que contiene hasta tercer orden (y algunos de orden cuártico como se discutirá más tarde) y que involucra campos provenientes de reducciones KK en  $10D$ , i.e.,  $G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, A_\mu^{\bar{J}}, \varphi, M_{\hat{I},\bar{J}}, A_\mu^{\hat{J}}$  y los extra  $A_\mu, M_{\bar{I}}$ . Estos campos son asociados a número de osciladores  $N = 0, 1$ , respectivamente, y  $\bar{N} = 0$ . Sus correspondientes modos son los recolectados

<sup>8</sup>Recordar que las coordenadas de la Heterótica pueden ser pensadas como coordenadas en un toro 16 dimensional con una proyección quiral.

en Tabla 1 así como también sus operadores de vértices.

Por lo tanto, separamos la acción completa en

$$S_{full\,het}(\Phi) = S_{enh}(\Phi) + S'(\Phi) \quad (5.3.30)$$

donde el término  $S'$  incluye todas las otras (infinitas) contribuciones que no estamos considerando explícitamente aquí. Estos incluyen campos de spin alto, de número de osciladores  $N > 1$ , órdenes mayores en fluctuaciones, etc.

Por otro lado  $S_{enh}(\Phi)$  es la acción con la que vamos a lidiar y esperamos que al aparecer una dependencia en los módulos luego de desarrollar en Fourier pueda reproducir todos los aumentos de simetría. Ella está dada por

$$\begin{aligned} S_{enh}(\Phi) = \int d^d x d\mathbb{Y} \sqrt{g} e^{-2\varphi} \Bigg[ & (R + 4\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}) \\ & - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{\mathcal{IJ}} \star F_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} \star F^{\mathcal{J}\mu\nu} + \frac{1}{8} \mathcal{D}_\mu \mathcal{H}^{\mathcal{IJ}} \star \mathcal{D}^\mu \mathcal{H}_{\mathcal{IJ}} \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \mathcal{D}_\mu M^{\mathcal{I}} \star \mathcal{D}^\mu M_{\mathcal{I}} - \frac{1}{2} M_{\mathcal{I}} \star F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} \\ & - \frac{1}{4} \partial_{\mathcal{J}} M^{\mathcal{I}} \star \partial_{\mathcal{K}} M_{\mathcal{I}} (H^{\mathcal{JK}} - \eta^{\mathcal{JK}}) + i \frac{1}{2} \partial_{\mathcal{I}} M^{\mathcal{J}} \star M_{\mathcal{J}} \star M^{\mathcal{I}} \Bigg]. \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

Como se ha enfatizado, los diferentes términos en esta acción han sido expresados en términos de los campos introducidos arriba. Tales dependen de las coordenadas compactas  $\mathbb{Y}$  y por lo tanto pueden ser expandidos en modos. La integración sobre  $\mathbb{Y}$  producirá una acción efectiva en  $d$  dimensiones espacio-temporales. En la próxima sección realizaremos esta expansión en modos e integraremos las coordenadas compactas, pero antes de presentar tales cálculos discutamos primero la estructura general y el tipo de información que esperamos que contenga.

Volvamos a recordar que los campos originados en reducciones KK de  $D = 10$ , i.e.  $G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \varphi, M_{\hat{I}, \hat{J}}, A^{\mathcal{J}} \equiv (A_{\mu}^{\hat{J}}, A_{\mu}^{\bar{J}})$ , requieren una expansión en modos con el constrain  $\mathbb{L}^2 = 0$ , mientras que los campos  $A_{\mu}, M_{\mathcal{I}}$ , asociados a los aumentos de simetría, requieren  $\frac{1}{2}\mathbb{L}^2 = 1$ . Parece poco natural indicar qué tipo de restricciones imponer en cada desarrollo en modos. Sin embargo, tales restricciones (LMC) pueden ser aplicados via multiplicadores de Lagrange en el Lagrangiano. Entonces, si indicamos con  $\phi_N(x, \mathbb{Y})$  un campo tal que su expansión en modos debe ser restringida a  $\frac{1}{2}\mathbb{L}^2 = 1 - N$ , en un lenguaje de DFT pediríamos

$$-\frac{1}{2} \partial_{\mathcal{I}} \partial^{\mathcal{I}} \phi_N(x, \mathbb{Y}) = -\frac{1}{2} (\partial_L^2 - \partial_R^2) \phi_N(x, \mathbb{Y}) = 1 - N. \quad (5.3.32)$$

En los casos considerados aquí  $N = 0, 1$  indexan el número de índices Left. Claramente, la SC de DFT (ver [1, 11]) no puede ser satisfecha si el fenómeno de aumento de simetría es tenido en cuenta.

El factor  $\frac{1}{2}(\eta^{\mathcal{JI}} - H^{\mathcal{JI}})$  actúa como un proyector  $O(r_l, r)$  covariante.

Si mantuviesemos los modos cero notaríamos que las primeras dos filas en (5.3.13) son

reproducidas con  $g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)}, M_{\hat{I}\hat{J}} = M_{\hat{I}\hat{J}}^{(0)}$ , etc. Sin embargo, una acción no trivial aparece debido al producto estrella  $\star$  siempre que modos no nulos entren en juego, y esto ocurre para los asociados a los campos que dan lugar al aumento de simetría. Daremos una discusión más detallada de esto en la próxima sección. Además, los diferentes términos de la acción están definidos como

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} + igA_\mu \star A_\nu + 2gA_{[\mu}^{\mathcal{I}} \star \partial_{\mathcal{I}}A_{\nu]} \\ F_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} &= 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}^{\mathcal{I}} + g\partial^{\mathcal{I}}A_\mu \star A_\nu + 2ig[A_{[\mu} \star A_{\nu]}^{\mathcal{I}} + \partial_{\mathcal{K}}A_{[\mu} \star \partial^{\mathcal{I}}A_{\nu]}^{\mathcal{K}}] + 2gA_{[\mu}^{\mathcal{J}} \star \partial_{\mathcal{J}}A_{\nu]}^{\mathcal{I}} \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu M^{\mathcal{I}} &= \partial_\mu M^{\mathcal{I}} + igA_\mu \star M^{\mathcal{I}} + gA_\mu^{\mathcal{J}} \star \partial_{\mathcal{J}}M^{\mathcal{I}} - g\partial_{\mathcal{J}}A_\mu \star (H^{\mathcal{J}\mathcal{I}} - \eta^{\mathcal{J}\mathcal{I}}) \\ \mathcal{D}_\mu \mathcal{H}^{\mathcal{I}\mathcal{J}} &= \left(\partial_\mu + ig\mathcal{L}_{A_\mu}\right)\mathcal{H}^{\mathcal{I}\mathcal{J}} + g\partial^{\mathcal{I}}A_\mu \star M^{\mathcal{J}} + ig[A_\mu \star \mathcal{H}^{\mathcal{I}\mathcal{J}} + 2\partial_{\mathcal{K}}A_\mu \star \partial^{(\mathcal{I}}\mathcal{H}^{\mathcal{J})\mathcal{K}}] \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

(donde  $g = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ ) generalizando (5.3.7) y  $\mathcal{L}_{A_\mu}$  es la derivada de Lie generalizada usual construida con el vector Cartan  $A_\mu^{\mathcal{I}}$ , i.e. queda

$$\mathcal{L}_{A_\mu} \mathcal{H}^{\mathcal{I}\mathcal{J}} = A_\mu^{\mathcal{K}} \partial_{\mathcal{K}} \mathcal{H}^{\mathcal{I}\mathcal{J}} + \mathcal{H}^{\mathcal{K}(\mathcal{I}} (\partial^{\mathcal{J})} A_{\mathcal{K}\mu} - \partial_{\mathcal{K}} A_\mu^{\mathcal{J}}). \quad (5.3.35)$$

Los términos entre corchetes darán lugar a contribuciones al sector masivo de la teoría, más aún, los términos con dos derivadas en ellos reproducen amplitudes de orden  $\alpha'$  superiores y son fundamentales para que se reproduzcan multipletes masivos. Esto se analizará en detalle en el siguiente Capítulo.

Finalmente, la tres forma  $H$  es definida como

$$H = dB + F^{\mathcal{I}} \star \wedge A_{\mathcal{I}} + F \star \wedge A. \quad (5.3.36)$$

Siempre que aparezca un producto de campos debe ser usado el producto estrella  $\star$ . La métrica generalizada debe ser expandida en término de sus fluctuaciones.

Analicemos porqué, en nuestra construcción, hemos usado la palabra “efectiva”. Todos los campos que consideramos contienen modos que son no masivos para algún valor específico de los módulos  $\Phi$ . Para los modos cero de  $G_{\mu\nu}^{(0)}(x), B_{\mu\nu}^{(0)}(x), \varphi^{(0)}(x), M_{\hat{I},\hat{J}}^{(0)}(x)$  ocurre siempre, mientras que  $n_c$  modos  $A_\mu^{(\check{\mathbb{P}})}(x), M_{\hat{I}}^{(\check{\mathbb{P}})}(x)$  se vuelven no masivos en algún punto  $\Phi_0$  para momentos en  $\check{G}(\Phi_0)_{n_c}$  (ver (5.3.22)). Estos son los modos que participan en el proceso de aumento de simetría. Al acercarse a un punto  $\Phi_0$  del espacio de módulos el espectro de modos livianos se incrementa agregando  $n_c$  muy poco masivos de  $\check{G}(\Phi_0)_{n_c}$ , el resto de los campos tienen masas del orden de la escala de la cuerda. Más aún, al moverse a algún otro punto fijo  $\Phi_1$  otro conjunto de modos (pueden ocurrir intersecciones) en  $\check{G}(\Phi_1)_{n_c}$  se volverán livianos<sup>9</sup>. Por lo tanto, la acción (5.3.31) puede ser expandida como

$$S_{enh}(\Phi) = S_{\text{light at } \Phi_0}(\Phi) + S_{\text{heavy at } \Phi_0}(\Phi) = S_{\text{light at } \Phi_1}(\Phi) + S_{\text{heavy at } \Phi_1}(\Phi) = \dots \quad (5.3.37)$$

<sup>9</sup>Siempre habrá modos que se mantengan muy masivos, como por ejemplo  $G_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})}(x)$  con  $\mathbb{L} \neq 0$ .

La primera (segunda) expansión es conveniente cuando  $\Phi$  está cerca de  $\Phi_0$  ( $\Phi_1$ ). En este caso, a bajas energías, el segundo término en la acción (y también  $S'$  arriba), contiene estados muy masivos (orden  $\alpha'^{-1}$ ) e interacciones de ellos con estados livianos, y por lo tanto no contribuye. Por lo tanto solo nos quedaríamos con una acción efectiva  $S_{eff}(\Phi \approx \Phi_0)$  de bajas energías

$$S_{eff}(\Phi \approx \Phi_0) = S_{enh}(\Phi \approx \Phi_0) = S_{light\ at\ \Phi_0}(\Phi \approx \Phi_0) \quad (5.3.38)$$

y análogamente para  $\Phi \approx \Phi_1$  etc. En  $\Phi = \Phi_0$  todos los campos en  $S_{eff}(\Phi_0)$  se vuelven no masivos y la acción efectiva debe reproducir (5.3.5) con grupo de gauge  $G_L \times U(1)_R^r$ . El producto  $\star$  juega un papel crucial en la reproducción de las constantes de estructura no-Abelianas. Al moverse fuera de  $\Phi_0$ , la simetría de gauge debería romperse, generalmente, a  $U(1)_L^{r+16} \times U(1)_R^r$  y  $S_{eff}(\Phi \approx \Phi_0)$  debería contener estados físicos masivos y no masivos transformando correctamente bajo el grupo Abelianiano.

Para finalizar esta sección comentaremos que  $S_{enh}(\Phi)$  parece codificar algo de información relevante sobre estados masivos. Discutiremos esto explícitamente con un ejemplo en 6.2, en la cual mostraremos que en un punto fijo particular, el primer nivel masivo se organiza en la representación correspondiente (la que ocurre en cuerdas) del grupo de simetría en cuestión (que en ese caso es  $SU(3)$ ). Esto es altamente no trivial ya que la representación, distinta de la adjunta, que arman (en el Lagrangiano) contiene constantes a reproducir no-triviales. Además veremos también que ocurre un mecanismo tipo “Goldstone” de tal manera que exáctamente las polarizaciones adecuadas (las que cuerdas predice) son las que arman la representación, mientras que los grados de libertad ortogonales a dichas polarizaciones son absorbidos con el fin de proveer los grados de libertad de una representación masiva.

## 5.4. Acción para modos GKK y el Aumento de Simetría

En esta sección realizaremos el desarrollo en modos de la acción presentada anteriormente en términos de los modos GKK. Para poder hacerlo, necesitaremos conocer bien que propiedades tiene el producto  $\star$ , por lo cual lo computaremos sobre los campos. Finalmente integraremos sobre las coordenadas internas  $\mathbb{Y}$  con el fin de obtener una acción efectiva  $d$  dimensional dependiente de los módulos. En particular mostraremos que luego de integrar los modos masivos, los modos GKK no masivos en el punto autodual darán lugar a la acción con simetría de gauge aumentada (5.3.13).

### El producto $\star$

El producto  $\star$  que estamos considerando es el que introdujimos en la Sección 5.2. Este fue definido sobre campos que dependan de las coordenadas dobles  $\mathbb{Y}$ . Si aplicamos éste sobre producto de campos  $\psi_N(x, \mathbb{Y})$  (la  $N$  representa la cantidad de osciladores que tienen sus

modos GKK en cuerdas) obtenemos

$$\phi_{N_1}(x, \mathbb{Y}) \star \psi_{N_2}(x, \mathbb{Y}) = \sum_{\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2} e^{i\pi l_1 \cdot \tilde{l}_2} \phi_{N_1}^{(\mathbb{L}_1)}(x) \psi_{N_2}^{(\mathbb{L}_2)}(x) e^{i(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2) \cdot \mathbb{Y}} \quad (5.4.1)$$

Vemos que a nivel modos, el producto  $\star$  se traduce en una fase  $l_1 \cdot \tilde{l}_2 = p_{1m} \tilde{p}^{2m} + p_{1I} \tilde{p}_2^I$  la cual depende del momento KK del primer campo  $l_1$  y el winding  $\tilde{l}_2$  del segundo (ver (C.1)). A su vez, la fase se descompone en una suma sobre dos términos, siendo el primero sobre la red interna y la segunda sobre las direcciones internas de la Heterótica. Esta última está restringida por una proyección quiral que elimina la componente Right y puede expresarse

$$p_{1I} \tilde{p}_2^I = \frac{1}{2} P_1 E P_2 \quad (5.4.2)$$

en términos de los pesos  $P$  de  $Spin(32)$ <sup>10</sup> y  $E_{IJ} = G_{IJ} + B_{IJ}$ .

La prima en la sumatoria sobre modos indica que la LMC debe ser impuesta sobre cada  $\mathbb{L}$  según corresponda, i.e.  $\frac{1}{2} \mathbb{L}_i^2 = 1 - N_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Ahora que tenemos una expresión explícita para el producto  $\star$  podemos analizar que propiedades tiene. Este análisis resulta bastante útil para poder descomponer rápidamente en modos GKK la acción y entender como se generan las constantes de estructura de los grupos de gauge cuando hay aumento de simetría.

Empecemos diciendo que  $\star$  es asociativo<sup>11</sup> y probémoslo. Para hacerlo, definamos los modos de Fourier del producto  $\star$  entre dos campos: expandiendo en modos tenemos que

$$\begin{aligned} (\phi_1 \star \phi_2)(x, \mathbb{Y}) &= \sum_{\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2} e^{i\pi p_1 \cdot \tilde{p}_2} \phi_1^{(\mathbb{P}_1)}(x) \phi_2^{(\mathbb{P}_2)}(x) e^{i(\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2) \cdot \mathbb{Y}} \\ &= \sum_{\mathbb{L}} \left[ \sum_{\mathbb{P}_1} e^{i\pi p_1 \cdot (\tilde{l} - \tilde{p}_1)} \phi_1^{(\mathbb{P}_1)}(x) \phi_2^{(\mathbb{L} - \mathbb{P}_1)}(x) \right] e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}} \\ &= \sum_{\mathbb{L}} (\phi_1 \star \phi_2)^{(\mathbb{L})}(x) e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

donde

$$(\phi_1 \star \phi_2)^{(\mathbb{L})}(x) = \sum_{\mathbb{P}_1} e^{i\pi p_1 \cdot (\tilde{l} - \tilde{p}_1)} \phi_1^{(\mathbb{P}_1)}(x) \phi_2^{(\mathbb{L} - \mathbb{P}_1)}(x) \quad (5.4.4)$$

es la definición del modo de Fourier de  $(\phi_1 \star \phi_2)(x, \mathbb{Y})$ . Con esto presente, probemos la aso-

<sup>10</sup>Todo el tiempo nos referimos al  $Spin(32)$  pero también es válido para  $E_8 \times E_8$ .

<sup>11</sup>Y menos mal, porque sino deberíamos haber especificado todos los paréntesis en la acción (5.3.31)

ciatividad

$$\begin{aligned}
(\phi_1 \star \phi_2)(x, \mathbb{Y}) \star \phi_3(x, \mathbb{Y}) &= \sum_{\mathbb{L}} \sum_{\mathbb{P}_3} e^{i\pi l \cdot \tilde{p}_3} (\phi_1 \star \phi_2)^{(\mathbb{L})}(x) \phi_3^{(\mathbb{P}_3)}(x) e^{i(\mathbb{L} + \mathbb{P}_3) \cdot \mathbb{Y}} \\
&= \sum_{\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3} e^{i\pi(p_1 + p_2) \cdot \tilde{p}_3} e^{i\pi p_1 \cdot \tilde{p}_2} \phi_1^{(\mathbb{P}_1)}(x) \phi_2^{(\mathbb{P}_2)}(x) \phi_3^{(\mathbb{P}_3)}(x) e^{i(\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3) \cdot \mathbb{Y}} \\
&= \sum_{\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3} e^{i\pi p_1 \cdot (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)} e^{i\pi p_2 \cdot \tilde{p}_3} \phi_1^{(\mathbb{P}_1)}(x) \phi_2^{(\mathbb{P}_2)}(x) \phi_3^{(\mathbb{P}_3)}(x) e^{i(\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3) \cdot \mathbb{Y}} \\
&= \sum_{\mathbb{P}_1, \mathbb{L}} e^{i\pi p_1 \cdot \tilde{l}} \phi_1^{(\mathbb{P}_1)}(x) \left[ \sum_{\mathbb{P}_2} e^{i\pi p_2 \cdot (\tilde{l} - \tilde{p}_2)} \phi_2^{(\mathbb{P}_2)}(x) \phi_3^{(\mathbb{L} - \mathbb{P}_2)}(x) \right] e^{i(\mathbb{L} + \mathbb{P}_1) \cdot \mathbb{Y}} \\
&= \phi_1(x, \mathbb{Y}) \star (\phi_2 \star \phi_3)(x, \mathbb{Y}). \tag{5.4.5}
\end{aligned}$$

Ahora que sabemos que  $\star$  es asociativo, analicemos el producto de tres campos

$$(\phi_{N_1} \star \psi_{N_2} \star \lambda_{N_3})(x, \mathbb{Y}) = \sum_{\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3}^I \tilde{f}_{\mathbb{L}_1 \mathbb{L}_2 \mathbb{L}_3} \phi_{N_1}^{(\mathbb{L}_1)}(x) \psi_{N_2}^{(\mathbb{L}_2)}(x) \lambda_{N_3}^{(\mathbb{L}_3)}(x) e^{i(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 + \mathbb{L}_3) \cdot \mathbb{Y}} \tag{5.4.6}$$

con

$$\tilde{f}_{\mathbb{L}_1 \mathbb{L}_2 \mathbb{L}_3} = e^{i\pi l_1 \cdot \tilde{l}_2} e^{i\pi(l_1 + l_2) \cdot \tilde{l}_3} \equiv \pm 1. \tag{5.4.7}$$

y la igualdad a  $\pm 1$  se tiene por ser  $l$  y  $\tilde{l}$  enteros. Estas  $\tilde{f}_{\mathbb{L}_1 \mathbb{L}_2 \mathbb{L}_3}$  se transformarán en las constantes de estructura cuando los  $\mathbb{L}_i$  sean no-masivos, es decir, en un punto fijo del espacio de módulos.

Supongamos ahora que integramos sobre las coordenadas internas  $\mathbb{Y}$  (como eventualmente ocurrirá en nuestro Lagrangiano), entonces encontraríamos que  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 + \mathbb{L}_3 = 0$  pues la exponencial lo impone. Esto no es otra cosa que conservación de momento interno doble. La  $\tilde{f}_{\mathbb{L}_1 \mathbb{L}_2 \mathbb{L}_3}$  se modificarían, pues la segunda fase quedaría como  $e^{-i\pi \frac{1}{2} \mathbb{L}_3^2}$  y obtendríamos

$$\tilde{f}_{\mathbb{L}_1 \mathbb{L}_2 \mathbb{L}_3} = e^{i\pi l_1 \cdot \tilde{l}_2} e^{-i\pi \frac{1}{2} \mathbb{L}_3^2} \tag{5.4.8}$$

Veamos que propiedades tienen estas constantes ante permutaciones de sus índices, cuando ya hemos hecho la integración,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{\mathbb{L}_1 \mathbb{L}_2 \mathbb{L}_3} &= e^{i\pi l_1 \cdot \tilde{l}_2} e^{-i\pi \frac{1}{2} \mathbb{L}_3^2} = e^{i\pi(l_1 \cdot \tilde{l}_2 + l_2 \cdot \tilde{l}_1)} e^{i\pi l_2 \cdot \tilde{l}_1} e^{-i\pi \frac{1}{2} \mathbb{L}_3^2} \\
&= e^{i\pi(\frac{1}{2} \mathbb{L}_3^2 - \frac{1}{2} \mathbb{L}_2^2 - \frac{1}{2} \mathbb{L}_1^2)} e^{i\pi l_2 \cdot \tilde{l}_1} e^{-i\pi \frac{1}{2} \mathbb{L}_3^2} = -e^{i\pi(N_1 + N_2 + N_3)} \tilde{f}_{\mathbb{L}_2 \mathbb{L}_1 \mathbb{L}_3} \tag{5.4.9}
\end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 = -\mathbb{L}_3$ . Análogamente, se obtiene una fase similar si intercambiamos  $2 \leftrightarrow 3$ .

Si estuviésemos mirando el producto de tres campos con  $N_i = 0$ , por ejemplo tres  $A(x, \mathbb{Y})$ , entonces las constantes  $\tilde{f}_{\mathbb{L}_1 \mathbb{L}_2 \mathbb{L}_3}$  serían completamente antisimétricas al permutar cualquiera de sus índices. Vale aclarar que esto es cierto sin importar si los índices de las  $\tilde{f}_{\mathbb{L}_1 \mathbb{L}_2 \mathbb{L}_3}$  se refieren a estados masivos como no-masivos.

Además, si se analiza el caso cuando el producto de tres campos es con  $N_i = 1$ , vemos que

si se están mirando los modos no-masivos esta fase es *siempre* irrelevante (es igual a uno). Por lo tanto, para todos modos (cero) que dan lugar a supergravedad esta fase es irrelevante y el producto  $\star$  se reduce al producto usual.

Ahora que hemos ganado intuición con el producto  $\star$  analicemos las diferentes contribuciones a la acción (5.3.31) en las siguientes secciones. Haremos explícitamente la integración en las coordenadas internas para encontrarnos con la acción efectiva y probar que efectivamente interpola entre distintos puntos del espacio de módulos.

## Término Cinético de Vectores

Empecemos analizando  $\int d^d x d\mathbb{Y} F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}$  ya que de aquí veremos como aparece explícitamente el aumento de simetría. Veremos al final que lograremos reducirlo al primer término de la tercera fila de (5.3.13) en un punto fijo del espacio de módulos. Definamos la componente de Fourier de  $F_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})}$  via<sup>12</sup>

$$F_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})} = \int d\mathbb{Y} F_{\mu\nu} e^{-i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}}, \quad (5.4.10)$$

Usando los resultados de la sección anterior sobre  $\star$  encontramos que:

$$F_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^{(\mathbb{L})} + ig \sum_{\mathbb{L}_2} \tilde{f}_{\mathbb{L} \mathbb{L}_2 \mathbb{L}_3} A_{\mu}^{(\mathbb{L}_2)} A_{\nu}^{(\mathbb{L}_3)} + 2ig \sum_{\mathbb{L}_2} f_{\mathbb{L}_3 - \mathbb{L}_3 \mathcal{I}} A_{[\mu}^{\mathcal{I}(\mathbb{L}_2)} A_{\nu]}^{(\mathbb{L}_3)}. \quad (5.4.11)$$

donde,  $\mathbb{L}_3 = \mathbb{L} - \mathbb{L}_2$  por la integración, se ha definido (de manera sugestiva) una nueva constante con índice doble  $\tilde{f}_{\mathbb{L} - \mathbb{L} \mathcal{I}}$  como

$$\tilde{f}_{\mathbb{L} - \mathbb{L} \mathcal{I}} = l_{\mathcal{I}}(\Phi), \quad \tilde{f}_{\mathbb{L} - \mathbb{L} \bar{\mathcal{I}}} = l_{R, \bar{\mathcal{I}}}(\Phi). \quad (5.4.12)$$

donde recordemos que éstas provienen de los términos con derivada  $\partial_{\mathcal{I}}$  en (5.3.33), ya que las derivadas al actuar sobre las exponenciales de los desarrollos en GKK “bajan” los momentos internos. Estas constantes dependen de los módulos, por lo que mismo  $F_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})}$  lo hace.

Comencemos a variar los módulos de modo que nos encontremos en un punto fijo de los mismos, es decir  $\Phi = \Phi_0$ . En esta situación deberíamos encontrarnos con tensores de gauge de una simetría no-Abeliana. Si nos quedamos solo a bajas energías (integramos los modos masivos), entonces solo deberíamos mirar los modos cero  $A_{\mu}^{\mathcal{I}(0)} \equiv A_{\mu}^{\mathcal{I}}(x)$  que dan lugar a los vectores tipo Cartan; y deberíamos quedarnos además con  $\check{\mathbb{P}} \in \check{G}_{n_c}(\Phi_0)$  en las sumatorias. Si realizamos la siguiente identificación

$$A_{\mu}^{(\mathbb{L}_i)} \leftrightarrow A_{\mu}^{\alpha(\mathbb{L}_i)}, \quad -A_{\mu}^{(-\mathbb{L}_i)} \leftrightarrow A_{\mu}^{\alpha(-\mathbb{L}_i)}, \quad (5.4.13)$$

donde los momentos  $\mathbb{L}_i$  son los que están en correspondencia uno a uno, en cuerdas, con raíces positivas  $\alpha_i \equiv \alpha^{(\mathbb{L}_i)}$ ,  $i = 1, \dots, \frac{n_c}{2}$ , (y  $-\mathbb{L}_i$  con  $-\alpha_i \equiv \alpha^{(-\mathbb{L}_i)}$ ) del grupo de simetría aumentado,

<sup>12</sup>La integral está normalizada de tal manera que el volumen sea 1 y hemos usado que  $\int d^{2n} \mathbb{Y} e^{i(\mathbb{P}_M + \mathbb{Q}_M) \cdot \mathbb{Y}} = \delta^{2n}(\mathbb{P}_M + \mathbb{Q}_M)$ ,



podemos ver que los  $F_{\mu\nu}^{\mathbb{L}_i}$  son iguales a los  $F_{\mu\nu}^{\alpha_i}$ , siempre que identifiquemos también

$$f_{\mathbb{L}_1\mathbb{L}_2\mathbb{L}_3} \leftrightarrow f_{\alpha(\tilde{\mathbb{P}}_1)\alpha(\tilde{\mathbb{P}}_2)\alpha(\tilde{\mathbb{P}}_3)}, \quad f_{-\mathbb{L}_1-\mathbb{L}_2-\mathbb{L}_3} \leftrightarrow -f_{\alpha(\tilde{\mathbb{P}}_1)\alpha(\tilde{\mathbb{P}}_2)\alpha(\tilde{\mathbb{P}}_3)} \quad (5.4.14)$$

Bajo estas identificaciones obtendríamos que  $F_{\mu\nu}^{\mathbb{P}}$  se reduce, para cada raíz  $\alpha^{(\tilde{\mathbb{P}})} = l_L^{(\tilde{\mathbb{P}})}(\Phi_0)$  (ver (5.3.21)) a

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{\alpha^{(\tilde{\mathbb{P}})}} &= 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}^{\alpha^{(\tilde{\mathbb{P}})}} + ig \sum_{\tilde{\mathbb{P}}_2} f_{\alpha(\tilde{\mathbb{P}}_2)\alpha(\tilde{\mathbb{P}}_3)\alpha(-\tilde{\mathbb{P}})} A_{\mu}^{\alpha^{(\tilde{\mathbb{P}}_2)}} A_{\nu}^{\alpha^{(\tilde{\mathbb{P}}_3)}} + 2ig f_{\hat{I}\alpha(-\tilde{\mathbb{P}})\alpha(-\tilde{\mathbb{P}})} A_{[\mu}^{\hat{I}} A_{\nu]}^{\alpha^{(\tilde{\mathbb{P}})}} \quad (5.4.15) \\ F_{\mu\nu}^{\alpha^{(-\tilde{\mathbb{P}})}} &= 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}^{\alpha^{(-\tilde{\mathbb{P}})}} + ig \sum_{\tilde{\mathbb{P}}_2} f_{\alpha(-\tilde{\mathbb{P}}_2)\alpha(-\tilde{\mathbb{P}}_3)\alpha(\tilde{\mathbb{P}})} A_{\mu}^{\alpha^{(-\tilde{\mathbb{P}}_2)}} A_{\nu}^{\alpha^{(-\tilde{\mathbb{P}}_3)}} + 2ig f_{\hat{I}\alpha(-\tilde{\mathbb{P}})\alpha(\tilde{\mathbb{P}})} A_{[\mu}^{\hat{I}} A_{\nu]}^{\alpha^{(-\tilde{\mathbb{P}})}} \end{aligned}$$

donde las  $f_{\alpha(-\tilde{\mathbb{P}}_1)\alpha(\tilde{\mathbb{P}}_2)\alpha(\tilde{\mathbb{P}}_3)} = f_{-\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = -f_{\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$  son exáctamente las constantes de estructura de tres raíces<sup>13</sup>; además se han anulado las  $\tilde{f}_{\mathbb{L}-\mathbb{L}\bar{I}} = l_{R,\bar{I}}(\Phi_0) = 0$  por estar en un punto fijo y las  $\tilde{f}_{\mathbb{L}-\mathbb{L}\hat{I}} = l_{\hat{I}}(\Phi_0) = \alpha^{(\tilde{\mathbb{P}})}$  son exáctamente las constantes de estructura  $f_{\alpha-\alpha\hat{I}}$  en la notación para el álgebra de Cartan-Weyl.

Por lo tanto, (5.4.15) se transforma en los tensores de campos de vectores de la simetría de gauge aumentada para el punto fijo en cuestión<sup>14</sup>. Entonces, podemos escribir en el punto fijo, lo siguiente

$$\begin{aligned} \int dx d\mathbb{Y} F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} &= - \sum_{\mathbb{L}} \int dx F_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})} F^{(-\mathbb{L})\mu\nu} \\ &= \int dx F_{\alpha\mu\nu} F^{\alpha\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

donde el signo negativo de la primera igualdad proviene del producto  $\star$  pero luego es reabsorbido por  $F_{\mu\nu}^{-\mathbb{L}}$  para dar lugar al correspondiente tensor de gauge en la siguiente igualdad. En conclusión hemos conseguido corresponder nuestro término de la acción con el primer término de la tercera fila de la acción (5.3.13).

Para completar el tensor de gauge no-Abeliano falta la componente de Cartanes, i.e. el segundo término de la misma fila que el anterior. Éste es reproducido por  $\mathcal{H}_{\mathcal{IJ}} \star F_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} \star F^{\mathcal{J}\mu\nu}$  en (5.3.31) ya que al estar concentrados en solo los modos GKK no-masivos se reduce a

$$F_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}^{\mathcal{I}} + 2ig \sum_{\tilde{\mathbb{P}}} f_{\alpha(\tilde{\mathbb{P}})\alpha(-\tilde{\mathbb{P}})}^{\mathcal{I}} A_{[\mu}^{\alpha^{(\tilde{\mathbb{P}})}} A_{\nu]}^{\alpha^{(-\tilde{\mathbb{P}})}} \quad (5.4.17)$$

donde recordemos nuevamente que  $f_{\alpha(\tilde{\mathbb{P}})\alpha(-\tilde{\mathbb{P}})}^{\bar{I}} = 0$  para modos GKK no-masivos.

En conclusión, hemos mostrado que sobre algún punto fijo el término “cinético” de los

<sup>13</sup>Notar que, el qué necesariamente queden tres raíces en las  $f_{\mathbb{L}_1\mathbb{L}_2\mathbb{L}_3}$  se debe a tipo de desarrollo en modos que hemos hecho y a la conservación de momento que impone la integración. Además notar que trivialmente conseguiríamos las constantes adecuadas ya que la fase de la cual provienen es *exáctamente* la fase proveniente de los cociclos en cuerdas que da lugar a las constantes de estructura del grupo de gauge aumentado

<sup>14</sup>Recordar que para ello hemos integrado todos los modos masivos que aparecían en la sumatoria en modos GKK.

vectores se reduce a exactamente al de uno con simetría de gauge no-Abeliana. Para mostrar que efectivamente esa simetría está presente en nuestra acción tenemos que mostrar aún varias cosas más: Los términos de masa deben anularse, los escalares no-masivos deben transformar en la adjunta del grupo de gauge no-abeliano, etc. En las siguientes secciones iremos mostrando cada una de estas cosas. En la siguiente sección analizaremos el mecanismo de Higgs que aparece al moverse del punto fijo.

### Caso del grupo de gauge de la Heterótica

Hagamos un breve comentario sobre el grupo de gauge de la Heterótica, el cual debe estar presente incluso cuando no hay ninguna compactificación, i.e. en  $D = 10$ . Las coordenadas internas de la Heterótica se pueden pensar como una compactificación en un punto fijo, es decir, que siempre está con la simetría aumentada, por consistencia interna de la teoría. En este caso  $\mathbb{L} \equiv l_L$  siempre es Left y  $l^I = P^I$  son las componentes de las raíces de  $Spin(32)$ , i.e.  $P = (\pm 1, \pm 1, 0, \dots)$  donde el subrayado indica permutaciones.

Por lo tanto, (5.4.16) se transforma en el término cinético de  $Spin(32)$  para los campos cargados y Eq.(5.4.17) con  $\mathcal{I} = 1, \dots, 16$  da lugar al equivalente para Cartanes. Al combinarse arman lo necesario para obtener el grupo de gauge de la Heterótica. Más aún, junto a las primeras dos filas de (5.3.31) arman la teoría efectiva de bajas energías en  $D = 10$  (el resto de los términos no están presentes al no haber compactificación). Vale aclarar que, incluso cuando haya compactificación, el grupo de la parte Heterótica siempre esta presente<sup>15</sup> por lo mencionado al principio.

### Término Cinético de Escalares

Ahora la idea es mostrar que en los puntos fijos los términos cinéticos de escalares rearmen la derivada covariante de simetría de gauge no-Abelina. Siguiendo pasos similares, podemos escribir

$$\int dx d\mathbb{Y} \mathcal{D}_\mu M_{\mathcal{J}} \star \mathcal{D}^\mu M^{\mathcal{J}} = - \int dx \sum_{\mathbb{L}} \mathcal{D}_\mu M_{\bar{J}}^{(\mathbb{L})} \mathcal{D}^\mu M^{(-\mathbb{L})\bar{J}}$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu M_{\bar{J}}^{(\mathbb{L})} &= \partial_\mu M_{\bar{J}}^{(\mathbb{L})} + ig \sum_{\mathbb{L}_2} \tilde{f}_{\mathbb{L}\mathbb{L}_2\mathbb{L}_3} M_{\bar{J}}^{(\mathbb{L}_2)} A_\mu^{(\mathbb{L}_3)} + ig \tilde{f}_{\mathbb{L}-\mathbb{L}\mathbb{I}} M_{\bar{J}}^{(\mathbb{L})} A_\mu^{I(0)} \\ &+ ig \sum_{\mathbb{L}_2} \tilde{f}_{\mathbb{L}\mathbb{L}_2\mathbb{L}_3} M_{\hat{I}\bar{J}}^{(\mathbb{L}_2)} \mathbb{L}_3^{\hat{I}} A_\mu^{(\mathbb{L}_3)} + ig l_{R\bar{I}} A_\mu^{\bar{I}(0)} M_{\bar{J}}^{(\mathbb{L})} - 2ig l_{R\bar{J}} A_\mu^{(\mathbb{L})} + \dots \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

la transformada de Fourier de la primera ecuación de (5.3.34) con  $\mathbb{L}_3 = \mathbb{L} - \mathbb{L}_2$ . Hemos expandido  $\mathcal{H}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$  en fluctuaciones y además hemos usado que  $(\bar{H}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} - \eta_{\mathcal{I}\mathcal{J}})\mathbb{L}^{\mathcal{J}} = (0, 2l_{R\bar{I}})$ . Los puntos suspensivos indican términos que contienen modos masivos  $A_\mu^{I(\mathbb{L}_3)}$ .

<sup>15</sup>Si se prendiesen las líneas de Wilson esto debería cambiar.

Movámonos hacia un punto fijo  $\Phi_0$ , y quedemonos con  $\check{\mathbb{P}} \in \check{G}_{nc}(\Phi_0)$  para hacer contacto con la derivada covariante de escalares en dicho punto. Hagamos además las siguientes identificaciones, análogas a las hechas para vectores,

$$M_{\check{J}}^{(\mathbb{L}_i)} \leftrightarrow M_{\check{J}}^{\alpha^{(\mathbb{L}_i)}}, \quad -M_{\check{J}}^{(-\mathbb{L}_i)} \leftrightarrow M_{\check{J}}^{\alpha^{(-\mathbb{L}_i)}}. \quad (5.4.19)$$

Con esto hecho, se obtiene (5.3.9), es decir la derivada covariante para escalares cargados, y por lo tanto el segundo término de la tercera fila de (5.3.5) es reproducido. Ahora, del término  $\frac{1}{8}\mathcal{D}_\mu\mathcal{H}^{\mathcal{IJ}} \star \mathcal{D}^\mu\mathcal{H}_{\mathcal{IJ}}$  en (5.3.13) para los modos  $M_{\hat{I}\hat{J}}^{(\mathbb{L}_i)}$  puede leerse

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu M_{\hat{I}\hat{J}}^{(\mathbb{L})} &= \partial_\mu M_{\hat{I}\hat{J}}^{(\mathbb{L})} + ig \sum_{\mathbb{L}_2}^I \tilde{f}_{\mathbb{L}\mathbb{L}_2\mathbb{L}_3} A_\mu^{(\mathbb{L}_2)} \mathbb{L}_{2\hat{I}} M_{\hat{J}}^{(\mathbb{L}_3)} + 2ig \sum_l^I \tilde{f}_{\mathbb{L}\mathbb{L}_2\mathbb{L}_3} A_\mu^{(\mathbb{L}_2)} M_{\hat{I}\hat{J}}^{(\mathbb{L}_3)} \\ &+ ig \mathbb{L}_{\hat{K}} A_\mu^{\hat{K}(0)} M_{\hat{I}\hat{J}}^{(\mathbb{L})} + ig l_{R\bar{I}} A_\mu^{\bar{I}(0)} M_{\hat{I}\hat{J}}^{(\mathbb{L})} + \dots \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

del cual, al mirar solo los modos no-masivos, que resultan siempre ser  $M_{\hat{I}\hat{J}}^{(0)}$  los últimos dos términos desaparecen, y producto de las identificaciones realizadas, la derivada covariante para escalares tipo Cartan (5.3.8) es reproducida. El cuarto término de la segunda fila en (5.3.5) es reproducido.

## Potencial Escalar y otros Acoplamientos

Términemos esta sección haciendo un comentario sobre el potencial escalar en la Heterótica. Para estados no-masivos, por como lo hemos presentado en (5.3.31)

$$\frac{1}{4}\partial_{\mathcal{J}}M^{\mathcal{I}} \star \partial_{\mathcal{K}}M_{\mathcal{I}}(\mathcal{H}^{\mathcal{JK}} - \eta^{\mathcal{JK}}) + i\frac{1}{2}\partial_{\mathcal{I}}M^{\mathcal{J}} \star M_{\mathcal{J}} \star M^{\mathcal{I}} + \mathcal{O}(M^4), \quad (5.4.21)$$

no aparece ningún potencial a tercer orden en los campos. Resulta ser  $\mathcal{O}(r_L, r)$  invariante y reproduce las interacciones de estados masivos dadas por amplitudes de scattering en cuerdas<sup>16</sup>.

Es sabido que para escalares no-masivos debe haber un potencial a cuarto orden (un orden más allá de nuestro análisis) como se muestra en [46]. Si expandimos nuestro potencial en fluctuaciones, por ejemplo en el primer término de arriba, veremos que aparecen términos a cuarto orden en un punto fijo de la forma:  $\sum_{\alpha} f_{I\alpha-\alpha} f_{J-\alpha\alpha} M_{I\bar{I}} M_{J\bar{J}} M_{\alpha\bar{K}} M_{-\alpha\bar{K}}$ , el cual es parte del potencial que debe aparecer para escalares no-masivos.

Si quisieramos tener el potencial completo tendríamos que agregar más términos en (5.3.31), a saber, todos de cuarto orden, como por ejemplo  $\partial_{\mathcal{I}}\phi_{\bar{I}} \star \partial^{\mathcal{I}}\phi_{\bar{I}} \star \phi_{\bar{J}} \star \phi_{\bar{J}}$  entre otros. Este análisis no se ha realizado y puede ser parte de futuras investigaciones.

Para finalizar, nuestra acción (5.3.31) contiene un término que acopla a escalares y vectores  $M_{\mathcal{I}} \star F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}$ . En un punto fijo, éste da lugar al último término de (5.3.13), y de hecho, fuera del punto fijo también está presente (no se anula) dando lugar a los acoplamientos adecuados entre escalares y vectores masivos con vectores  $U(1)_R$  no-masivos.

<sup>16</sup>Tales fueron computadas en [45]

## 5.5. Mecanismo de Ruptura/Aumento de Simetría

En esta sección veremos más explícitamente la acción fuera de puntos fijos. Veremos como la simetría se reduce a una Abelian, donde cada estado transforma con su carga correspondiente, las masas de los estados y analizaremos la ruptura de simetría a través del espacio de módulos.

Al final de la sección veremos un ejemplo explícito, el aumento de simetría a  $SU(3)$  cuando solo dos dimensiones son compactificadas. Encontraremos algo fascinante, cuando se miran los estados masivos del primer nivel de masa se ve que estos se organizan en una representación del grupo. Esto es algo altamente no trivial pues los estados que la organizan provienen de desarrollo en modos GKK de campos diferentes (diferentes LMC y osciladores) e incluso necesitan ser descompuestos en polarizaciones específicas, ya que no todos los grados de libertad en ellos arman esa representación. Las polarizaciones ortogonales pasan a ser absorbidas por estados masivos para completar su representación, tal y como ocurre en cuerdas.

### La Masa de los Vectores

La idea del aumento de simetría no podría estar completa si no probáramos que en nuestra acción (5.3.31) los estados que participan aparecen con términos de masa que, además de coincidir con los de cuerdas, se anulan en los puntos fijos.

Si miramos (5.3.31) no se observa a simple vista ningún término que se vea “tipo” masivo, es decir, que al desarrollar en modos GKK e integrar de lugar a términos de dos campos para vectores (sin derivadas espacio tiempo). No obstante, aparecen términos de masa y estos provienen de las “derivadas covariantes” de los escalares (5.4.18)

$$\begin{aligned}
 \int dx d\mathbb{Y} \frac{1}{4} D_\mu M_{\mathcal{J}} \star D^\mu M^{\mathcal{J}} &= \sum_{\mathbb{L}}' -\frac{1}{4} D_\mu M_{\bar{J}}^{(\mathbb{L})} D^\mu M^{(-\mathbb{L})\bar{J}} = \\
 &= \dots + \sum_{\mathbb{L}}' \frac{1}{4} g^2 2 [\mathbb{L} \cdot (\bar{H} - \eta) \cdot \mathbb{L}] A_\mu^{(\mathbb{L})} A_\mu^{(-\mathbb{L})} \\
 &= \dots + \sum_{\mathbb{L}}' \frac{m_A^2}{2} A_\mu^{(\mathbb{L})} A_\mu^{(-\mathbb{L})}
 \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

donde los puntos suspensivos indican todos los otros términos que aparecen luego de hacer las distributivas y donde además hemos usado el resultado de cuerdas  $m_A^2 = 2l_R^2 = \mathbb{L} \cdot (\bar{H} - \eta) \cdot \mathbb{L}$  para la masa de los vectores cargados.

Varias cosas deben ser comentadas. Primero notemos que las masas provienen del mismo sitio del cual aparecen las masas en una teoría con ruptura espontánea, i.e. de los términos cinéticos de los escalares. Solo que aquí, quien juega el rol de VEV es el espacio interno via el background  $\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{IJ}}$ . De esta manera, en puntos genéricos del espacio de módulos la simetría es simplemente  $U(1)^{r_L} \times U(1)^r$ , pero al moverse a  $\Phi = \Phi_0$ , para  $\tilde{\mathbb{P}} \in \check{G}_{n_c}(\Phi_0)$  los vectores se vuelven no-masivos y las derivadas covariantes aparecen dando lugar a un aumento de simetría.

Segundo, además de quedar explícitamente la fórmula de masa, deberían quedar bien normalizados los términos cinéticos, pues es el polo quien debe quedar en su lugar correcto. Veamos la normalización del término cinético:

$$- \int dx d\mathbb{Y} \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} = \sum_{\mathbb{L}}' \frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu}^{(\mathbb{L})} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{(\mathbb{L})}) (\partial_{\mu} A_{\nu}^{(-\mathbb{L})} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{(-\mathbb{L})}) + \dots \quad (5.5.2)$$

la cual al juntarse con los términos de masa de (5.4.18) daría lugar a

$$\sum_{\mathbb{L}}' \frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu}^{(\mathbb{L})} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{(\mathbb{L})}) (\partial_{\mu} A_{\nu}^{(-\mathbb{L})} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{(-\mathbb{L})}) + \frac{m_A^2}{2} A_{\mu}^{(\mathbb{L})} A_{\mu}^{(-\mathbb{L})} \quad (5.5.3)$$

que no es otra cosa que el lagrangia de Proca con signatura  $(-+++...)$  (con una normalización global diferente) de un vector con masa  $m_A$ .

La masa de los vectores Cartanes puede obtenerse de manera análoga y proviene de la “derivada covariante”  $\mathcal{D}_{\mu} \mathcal{H}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$  via la  $\mathcal{L}_{A_{\mu}}$  en ella.

## Bosones de Goldstone

Cuando los escalares  $M_{\bar{J}}^{(\mathbb{L})}$  pasan de ser no-masivos a masivos ocurre que no todos ellos son grados de libertad físicos. En cuerdas esto se manifiesta via una anomalía de sus operadores de vértice, la cual al ser cancelada impone una condición de polarización en ellos. En nuestro Lagrangiano, sobre los puntos fijos, todos los grados de libertad aparecen. Por lo tanto, al movernos deberíamos observar que alguno de ellos desaparecen, o como ocurre aquí, pasan a ser absorbidos en otro grado de libertad que los necesite para completar su representación masiva. En este caso se trata de los vectores  $A_{\mu}^{(\mathbb{L})}$  (con el mismo  $\mathbb{L}$ ) quienes absorben de tal manera de completar la representación masiva. Veamos como ocurre: Del término cinético encontramos que

$$\begin{aligned} + \sum_{\mathbb{L}}' \frac{1}{4} D_{\mu} M_{\bar{J}}^{(\mathbb{L})} D^{\mu} M^{(-\mathbb{L})\bar{J}} &= \dots + \sum_{\mathbb{L}}' 2 \frac{1}{4} \mathbb{L}^{\bar{J}} \partial_{\mu} M_{\bar{J}}^{(\mathbb{L})} A_{\mu}^{(-\mathbb{L})} \\ &= \dots + \sum_{\mathbb{L}}' \frac{1}{2} l_R^{\bar{J}} \partial_{\mu} M_{\bar{J}}^{(-\mathbb{L})} A_{\mu}^{(\mathbb{L})}. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

un término de dos campos mezcla a los vectores con el grado de libertad  $l_R^{\bar{J}} \partial_{\mu} M_{\bar{J}}^{(-\mathbb{L})}$ . Como fue discutido en [45], esto indica que hay una combinación de los  $\bar{I} = 1, \dots, r = 10 - d$  escalares, en este caso es  $l_R^{\bar{J}} \partial_{\mu} M_{\bar{J}}^{(-\mathbb{L})}$ <sup>17</sup>, que es absorbida por los vectores para completar su representación masiva. De hecho, en un punto fijo  $\Phi_0$  y para  $\tilde{\mathbb{P}} \in \check{G}_{n_c}(\Phi_0)$  esta combinación no esta presente pues  $l_R = 0$ . Al moverse fuera de  $\Phi_0$ ,  $l_R \neq 0$ , y las  $n_c$  combinaciones anteriores (una para cada  $L$  que se vuelva masivo al romper el grupo) dan lugar a los grados de libertad longitudinales de los  $n_c$  vectores  $A_{\mu}(\mathbb{L})$  que se vuelven masivos. Es decir, rearmen el grado de

<sup>17</sup>Dicho sea de paso, este es exáctamente el grado de libertad que debe desaparecer de los operadores de vértice de escalares para librarlos de anomalías (ver [27])

libertad

$$A_{\mu}^{(\mathbb{L})'} = A_{\mu}^{(\mathbb{L})} + l_R^{\bar{J}} \partial_{\mu} M_{\bar{J}}^{(\mathbb{L})}. \quad (5.5.5)$$

## Masas de los Escalares

Siguiendo pasos similares a los realizados en la sección de Masas de Vectores, podemos leer la masa de los escalares de los términos cuadráticos del potencial escalar (5.4.21)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int dx d\mathbb{Y} (\mathcal{H}^{\mathcal{I}\mathcal{J}} - \eta^{\mathcal{I}\mathcal{J}}) \partial_{\mathcal{I}} M^{\mathcal{K}} \star \partial_{\mathcal{J}} M_{\mathcal{K}} = \sum'_{\mathbb{L}} \frac{1}{4} [\mathbb{L} \cdot (\bar{H} - \eta) \cdot \mathbb{L}] M^{(\mathbb{L})\mathcal{K}} M_{\mathcal{K}}^{(-\mathbb{L})} + \dots \\ & = \sum'_{\mathbb{L}} \frac{1}{4} m_{M^{(\mathbb{L})}}^2 M^{(\mathbb{L})\bar{K}} M_{\bar{K}}^{(-\mathbb{L})} + \dots \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

con

$$m_{M^{(\mathbb{L})}}^2 = 2l_R^2 = \mathbb{L} \cdot (\bar{H} - \eta) \cdot \mathbb{L}, \quad (5.5.7)$$

el cual es el resultado esperado desde cuerdas. Coinciden con la masa de los vectores, lo cual es esperable ya que prácticamente tienen el mismo vértice (uno tiene osciladores internos y el otro externos).

Igual que antes es necesario chequear la normalización relativa al término cinético para que el polo quede en el lugar adecuado:

$$\int d\mathbb{Y} \frac{1}{4} D_{\mu} M_{\mathcal{J}} \star D^{\mu} M^{\mathcal{J}} = - \sum'_{\mathbb{L}} \frac{1}{4} \partial_{\mu} M^{(\mathbb{L})\mathcal{J}} \partial^{\mu} M_{\mathcal{J}}^{(-\mathbb{L})} + \dots \quad (5.5.8)$$

que al juntarse con los términos de masa arma

$$- \sum'_{\mathbb{L}} \left[ \frac{1}{4} \partial_{\mu} M^{(\mathbb{L})\mathcal{J}} \partial^{\mu} M_{\mathcal{J}}^{(-\mathbb{L})} + \frac{1}{4} m_{M_{\mathcal{J}}^{(\mathbb{L})}}^2 M^{(\mathbb{L})\mathcal{J}} M_{\mathcal{J}}^{(-\mathbb{L})} \right] \quad (5.5.9)$$

el cual no es otra cosa que el Lagrangiano de un escalar masivo (con una normalización global diferente) en signatura  $(-+++ \dots)$  con masa  $m_{M_{\mathcal{J}}^{(\mathbb{L})}}$ .

## Simetrías: T-dualidad y Gauge Abelianas

### T-dualidad

No hemos mencionado nada sobre la T-dualidad. La acción (5.3.13) está escrita en un lenguaje  $O(r_L, r)$  via contracción de índices, por lo que uno podría estar tentado de pensar que automáticamente es T-dual, sin embargo la presencia del producto  $\star$  podría romper esta simetría. Probemos que, al incluir los momentos y windings, el producto  $\star$  no rompe  $O(r_L, r, \mathbb{Z})$ , y como consecuencia la teoría es T-dual invariante.

Cada término de la expansión de Fourier contiene un modo indexado con  $\check{\mathbb{P}}$ , el cual codifica el momento y el winding (5.3.15) de dicho estado, y además aparece una exponencial  $e^{i\mathbb{L} \cdot \mathbb{Y}}$  donde su exponente es explícitamente  $O(r_L, r, \mathbb{Z})$  covariante.

Sea una rotación  $h \in O(r_L, r, \mathbb{Z})$ , ésta mapea  $\check{\mathbb{P}} \rightarrow \check{\mathbb{P}}' = h\check{\mathbb{P}}$  y por lo tanto produce  $e^{i\pi\tilde{l}_1 l_2} \phi^{(\check{\mathbb{P}}_1)}(x) \psi^{(\check{\mathbb{P}}_2)}(x) \rightarrow e^{i\pi\tilde{l}'_1 l'_2} \phi^{(\check{\mathbb{P}}'_1)}(x) \psi^{(\check{\mathbb{P}}'_2)}(x)$ . Si  $\check{\mathbb{P}}$  satisface la condición LMC, entonces también  $\check{\mathbb{P}}'$  lo hace, y por lo tanto, al sumar sobre los GKK en la expansión, ésta resulta invariante.

Fue crucial para la demostración el sumar sobre todos los GKK de la expansión. Si hubiésemos restringido nuestro análisis a un subconjunto de modos GKK, por ejemplo, a aquellos en  $\check{G}(\Phi_0)_{n_c}$ , la rotación  $h$  nos sacaría de dicho subconjunto, i.e.  $\check{\mathbb{P}}'$  resultaría masivo en  $\Phi_0$ <sup>18</sup>. Terminemos diciendo, que desde ya, cualquier campo que contenga algún índice de  $O(r_L, r)$  debe aparecer contraído como de hecho ocurre.

### Gauge Abelian

Nuestra acción en puntos genéricos del espacio de módulos debe tener una simetría  $U(1)^{r_L} \times U(1)^r$ . Por lo tanto, todos los estados masivos deberían transformar covariantemente ante esta simetría (ya que están cargados via winding y momento). Recordemos que un campo  $\Phi^{(\mathbb{L})}(x)$  que lleva carga  $(\mathbb{L})_{\mathcal{I}} = \tilde{f}_{\mathbb{L}-\mathbb{L}\mathcal{I}}$  con respecto a un vector de gauge  $A_{\mu}^{(\mathcal{I})}$  debe transformar como

$$\begin{aligned} \Phi(x)^{(\mathbb{L})} &\rightarrow e^{ig_{\mathbb{L}\mathcal{I}}\alpha^{\mathcal{I}}(x)} \Phi(x)^{(\mathbb{L})} \\ A_{\mu}^{\mathcal{I}} &\rightarrow A_{\mu}^{\mathcal{I}} - \partial_{\mu}\alpha^{\mathcal{I}} \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

y por lo tanto las derivadas covariantes deben ser de la forma

$$D_{\mu}\Phi(x)^{(\mathbb{L})} = \partial_{\mu}\Phi(x)^{(\mathbb{L})} + i(\mathbb{L})_{\mathcal{I}}A_{\mu}^{(\mathcal{I})}\Phi(x)^{(\mathbb{L})}. \quad (5.5.11)$$

Si miramos las ecuaciones (5.4.18) y (5.4.11) vemos que tienen exáctamente esta forma, tanto los escalares como los vectores masivos.

Para ser mas explícitos, mostremos como transforman los campos masivos (cargados) ante esta simetría

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})} &\rightarrow e^{ig_{\mathbb{L}\mathcal{I}}\alpha^{\mathcal{I}}(x)} 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}^{(\mathbb{L})} + 2ige^{ig_{\mathbb{L}\mathcal{I}}\alpha^{\mathcal{I}}(x)} \mathbb{L}_{\mathcal{I}}A_{[\nu}\partial_{\mu]}\alpha^{\mathcal{I}} + \\ &\quad + ige^{ig_{\mathbb{L}\mathcal{I}}\alpha^{\mathcal{I}}(x)} \sum_{\mathbb{L}_2} \tilde{f}_{\mathbb{L}\mathbb{L}_2\mathbb{L}_3} A_{\mu}^{(\mathbb{L}_2)} A_{\nu}^{(\mathbb{L}_3)} + 2ige^{ig_{\mathbb{L}\mathcal{I}}\alpha^{\mathcal{I}}(x)} \tilde{f}_{\mathbb{L}-\mathbb{L}\mathcal{I}} (A_{[\mu}^{\mathcal{I}} - \partial_{[\mu}\alpha^{\mathcal{I}}) \mathbb{L}_{\mathcal{I}} A_{\nu]}^{(\mathbb{L})} \\ &= e^{ig_{\mathbb{L}\mathcal{I}}\alpha^{\mathcal{I}}(x)} F_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})} \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

donde se ha usado la conservación de momento  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_2 + \mathbb{L}_3$ . Es decir,  $F_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})}$  es covariante ante la simetría Abeliana, y por lo tanto, los términos de la forma  $F_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})} F^{\mu\nu(-\mathbb{L})}$  que aparecen al desarrollar en modos son invariantes  $U(1)$ . Argumentos similares se aplican a las derivadas de escalares, quedando así la acción desarrollada en modos invariante.

<sup>18</sup>La fórmula de masa es invariante solo cuando se transforman el background y momentos y windings. En ese caso es  $\check{\mathbb{P}}' \in \check{G}(h\Phi_0)_{n_c}$ , quienes se vuelven no-masivos en el nuevo punto fijo  $h\Phi_0$ .

## Gauge No-Abeliana

En un punto fijo la simetría aumenta, y como hemos mostrado, después de integrar los modos masivos y quedarse con los livianos, todos los grados de libertad transforman en alguna representación del grupo de simetría. Hemos dicho arriba, que si no integrabamos los masivos, estos aparecen siempre transformando bajo la simetría Abeliana. Sin embargo, en los puntos fijos éstos deberían organizarse entre sí en representaciones de la simetría de gauge no-Abeliana.

Una pregunta factible sería si nuestra acción (5.3.31) puede reproducir esto<sup>19</sup>. Claramente la respuesta es que en general no es posible, ya que en cuerdas los estados se organizan en representaciones del grupo de simetría de tal manera que en la representación aparecen estados con distinto número de osciladores. Nuestra acción solo tiene en cuenta estados con número de oscilador  $N = 0, 1$ , y si queremos que todos los modos masivos rearmen una representación tendríamos que incluir infinitos campos con sus respectivos desarrollos GKK a la acción. Veamos rápidamente que esto ocurre en general: Sea  $G$  el grupo de simetría aumentado y  $\mathbb{K} = (k_L, k_R)$  con  $k_R = 0$ ,  $k_L^2 = 2$  la carga de gauge de un vector no-masivo  $A_\mu^{(\mathbb{K})}$  de  $G$ . Este vector tiene en cuerdas una corriente asociada  $J^{(\mathbb{K})}$ . Sea ahora  $\Phi^{(\mathbb{L})}(x)$  algún estado masivo, de masa  $m^{(\mathbb{L})}$ , del cual queremos conocer su multiplete (es decir, con quién se mezcla ante la simetría  $G$ ) y supongamos además que es alguno que ya hayamos incluido en nuestra acción, es decir  $\frac{1}{2}\mathbb{L}^2 = 1$ . En cuerdas, el OPE de su vértice con  $J^{(\mathbb{K})}$  nos devuelve otro estado  $\Psi^{(\mathbb{S})}(x)$ , donde  $\mathbb{S} = (s_L, s_R) = \mathbb{L} + \mathbb{K}$  con la *misma* masa  $m^{(\mathbb{L})}$  (sino no sería parte del mismo multiplete). Además debe ocurrir que  $\Psi^{(\mathbb{S})}(x)$  cumpla  $\bar{N}_s = \bar{N}_B + \bar{N}_F + \tilde{E}_0 = 0$  y su número de oscilador  $N_s$  debe cumplir

$$\frac{\alpha'}{2}m_L^2 = \frac{1}{2}l_L^2 - 1 = \frac{1}{2}s_L^2 + N_s - 1 = \frac{1}{2}(\mathbb{L} + \mathbb{K})_L^2 + N_s - 1 = \frac{1}{2}l_L^2 + l_L k_L + N_s.$$

en virtud de que tenga la misma masa que el estado sin transformar. De aquí se deduce que

$$N_s = 1 - \frac{1}{2}\mathbb{S}^2$$

Por lo que en general, aunque hayamos partido de los estados que incluimos, estados con número de osciladores  $N_s$  diferentes se generan y por lo tanto tendríamos que haber agregado estados con desarrollo en modos distintos, en general uno, donde la suma sea con la condición  $\delta(\frac{1}{2}\mathbb{S}^2, 1 - N)$ , para cada valor posible de  $N$ .

No obstante, podemos analizar algún caso donde la representación masiva se arme usando *solo* los estados con los que contamos, es decir, con  $N = 0, 1$ . Dicho caso será estudiado en el próximo Capítulo, cuando analicemos el ejemplo de aumento de simetría al grupo  $SU(3)$  en el  $T^2$ . Mostraremos que, para los primeros niveles masivos, efectivamente los estados se organizan en el multiplete correspondiente, indicando que nuestra acción porta información altamente no trivial sobre los estados masivos. La incorporación de desarrollos en modos GKK y el uso del producto  $\star$  es tan fuerte que no solo produce el efecto de aumentos de simetría

<sup>19</sup>Al preguntarnos por esto ya estamos abandonando el concepto de acción efectiva de bajas energías



en el sector efectivo de bajas energías de la teoría, sino que además parece tener el efecto adecuado sobre el primer nivel masivo (cuando los estados involucrados son los que se han tenido en cuenta) de tal manera de incorporarlos en multipletes de gauge adecuados.

## 5.6. Conclusiones del Capítulo

Motivados en los vértices de cuerdas, hemos desarrollado una acción con simetría  $O(n, n, \mathbb{Z})$  que incluye campos con distinta LMC, que pueden ser desarrollados en modos (GKK) en el espacio Doble. Tal acción contiene un número infinito de campos (uno por cada modo GKK). Al desarrollar en modos y realizar la integración de las coordenadas Dobles, la acción puede separarse en dos partes: Una con estados no-masivos y otra con masivos.

La parte de la acción con modos no-masivos describe *siempre* el sector de bajas energías de la Teoría de Cuerdas Heterótica. La acción depende de los módulos de tal manera que al acercarlos a un punto de aumento de simetría, estados masivos en la acción se vuelven continuamente no-masivos dando lugar así al aumento del grupo de gauge. De esta manera se consigue pasear por todo el espacio de módulos y reproducir *todos* los puntos de aumento de simetría. En el proceso la acción siempre puede separarse en dos partes como hemos mencionado. Al conectar con alguna trayectoria en el espacio de módulos dos puntos de aumento de simetría, ocurre un reordenamiento de los estados en cada una de las partes de la acción: Estados masivos se vuelven no masivos y por lo tanto reescriben la parte de la acción que los describe; y vice versa, estados no-masivos adquieren masa y por lo tanto van a parar a la parte de la acción correspondiente a estados masivos.

En los entornos de los puntos de aumento de simetría, los estados que serán no-masivos son lo suficientemente livianos como para influir en la fenomenología de bajas energías. La acción interpoladora logra captar todos los acoplamientos de estos entre sí y con los estados no-masivos de tal manera de reproducir las amplitudes de scattering de la cuerda. En el proceso de volverse no-masivos, los estados reproducen el mecanismo de Higgs cuerdoso descrito ya en Capítulos anteriores.

Es fundamental en todo el desarrollo el hecho de que el espacio Doble *no es el usual de DFT*. Como fue mostrado al comienzo del Capítulo, es necesario imponer una *no-conmutatividad* en el mismo para poder incorporar en la teoría los efectos cuánticos de los cociclos. Sin esta no-conmutatividad los acoplamientos del sector no-masivo (o directamente, de los estados livianos) no serían reproducidos. Por lo tanto no podrían reproducirse los acoplamientos que dan lugar a las constantes de estructura que a su vez sirven para reescribir la acción como invariante de gauge, i.e. no sería posible reproducir la simetría de gauge no-Abeliana de los puntos de aumento. Tal no-conmutatividad fue introducida via un producto  $\star$  sobre los campos de la teoría como ha sido sugerido ya en [2–4], mostrando así la necesidad de los mismos.

En el próximo Capítulo veremos que la acción interpoladora tiene información no-trivial sobre el sector masivo. Fuera de los puntos de aumento de simetría, se ha mostrado que la simetría de gauge Abeliana está presente via derivadas covariantes. Pero en los puntos de aumento de simetría los estados deberían organizarse en multipletes del grupo de gauge  $G$ , y

deberían aparecer con derivadas covariantes apropiadas. Mostraremos que en algunos casos, la acción interpoladora reproduce tales acoplamientos.

# Capítulo 6

## Representaciones Masivas

En el Capítulo anterior mostramos una acción que interpola entre los distintos puntos de aumento de simetría, reproduciendo siempre el sector liviano de la Teoría de Cuerdas; incluso el mecanismo de Higgs cuerdo es reproducido al apartarse de los puntos de aumento. Tanto en el Capítulo 2 como en el Capítulo 5 mostramos que fuera de los puntos de aumentos la simetría Abelia es preservada via derivadas covariantes apropiadas sobre el sector masivo. Una pregunta que surge de manera natural es si el Lagrangiano propuesto para la interpolación, además de describir bien a los estados que se vuelven masivos en los entornos del punto de aumento, también logra describir “bien” a los estados masivos *en el punto* en cuestión.

“Bien” quiere decir aquí que en el punto de aumento de simetría los estados masivos se agrupen en el Lagrangiano armando multipletes donde la derivada espacial de cada estado aparece como derivada covariante del grupo  $G$  de aumento de simetría. De esta manera es esperamos que de una expresión como

$$F_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}^{(\mathbb{L})} + ig \sum_{\mathbb{L}_2} \tilde{f}_{\mathbb{L}\mathbb{L}_2\mathbb{L}_3} A_{\mu}^{(\mathbb{L}_2)} A_{\nu}^{(\mathbb{L}_3)} + 2ig \sum_{\mathbb{L}_2} f_{\mathbb{L}_3-\mathbb{L}_3\mathcal{I}} A_{[\mu}^{\mathcal{I}(\mathbb{L}_2)} A_{\nu]}^{(\mathbb{L}_3)} \quad (6.0.1)$$

para ciertos modos  $\mathbb{P}$  los coeficientes  $\tilde{f}_{\mathbb{L}\mathbb{L}_2\mathbb{L}_3}$  y  $f_{\mathbb{L}_3-\mathbb{L}_3\mathcal{I}}$  reproduzcan dos cosas *simultáneamente*:

- Las constantes de estructura  $f_{abc}$  del grupo  $G$  dando lugar al  $F_{\mu\nu}^a$  de gauge, cuando los modos GKK corresponden a  $\mathbb{P} \in \check{G}(\Phi_0)$  como fue ya mostrado en el Capítulo anterior.
- Las constantes  $T_{ij}^a$  que arman la representación en la que transformen estados masivos, cuando los modos involucrados son  $\mathbb{P} \in \check{G}(\Phi_0)$  y otros  $\mathbb{P} \notin \check{G}(\Phi_0)$  masivos. Es decir,  $F_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})}$  tomaría la forma

$$\partial_{\mu}\Phi_i + (ig) A_{\mu}^a T_{ij}^a \Phi_j \quad (6.0.2)$$

cuando  $\mathbb{L} \notin \check{G}(\Phi_0)$  y cuando solo uno de los momentos GKK  $\mathbb{L}_2$  o  $\mathbb{L}_3$  no está en  $\check{G}(\Phi_0)$  pero si en el mismo nivel de masa que  $\mathbb{L}$ , dando lugar así a los campos denotados como  $\Phi_i$  y  $\Phi_j$  respectivamente. El momento restante debe estar en  $\check{G}(\Phi_0)$  para dar lugar a campo denotado como  $A_{\mu}^a$ .

Es claro, como ya hemos mostrado, que no podremos describir “bien” a *todos* los estados

masivos del Lagrangiano pues un número infinito de campos extras deberían de ser agregados a la acción. Veremos en este Capítulo que existen casos donde la acción logra reproducir exactamente las derivadas covariantes de algunas representaciones masivas, es decir da lugar a los  $T_{ij}^a$  exactos. Daremos un ejemplo concreto de esto en la sección 6.2 donde veremos el caso de la compactificación de dos dimensiones al toro  $T^2$  que da lugar al grupo de aumento de simetría  $SU(3)$  y como los estados del primer nivel no masivo, correspondiente a masa  $\frac{4}{3}\alpha'$ , arman el multiplete de la **6** de  $SU(3)$ . La derivada covariante de estos estados *es reproducida* y para ello, el producto  $\star$  juega un papel fundamental.

En la siguiente Sección discutiremos en general como se construyen las representaciones irreducibles (irreps) masivas, a partir de las corrientes  $J^a(z)$  de la teoría conforme que dan lugar al grupo de gauge. De esta manera podremos saber que estados se mezclan entre si en cuerdas via la acción del grupo  $G$ . Si el multiplete masivo contiene *solo* estados con osciladores  $N = 0, 1$  entonces la acción 5.3.31 los contendrá y podremos analizar si reproduce “bien” las derivadas covariantes.

## 6.1. Construcción de Irreps Masivas

Cuando en la Teoría de Cuerdas aparecen corrientes  $J^a(z)$  cuyos modos satisfacen un álgebra de Kac-Moody, o equivalentemente el OPE entre ellas resulta

$$J_a(z)J_b(w) \sim \frac{k\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f_{ab}^c J_c(w)}{z-w} \quad (6.1.1)$$

donde  $k$  es una constante y  $f_{ab}^c$  las constantes de estructura de un grupo  $G$ , se puede realizar una reescritura de la cuerda (como teoría conforme), en término de estas corrientes. Esta construcción es conocida como *construcción de Sugawara*. Los puntos de aumento de simetría dan lugar a la aparición de estas corrientes, con  $k = 1$ , siendo éstas

$$\begin{aligned} J_\alpha(z) &=: e^{i\alpha \cdot Y_L(z)} : \\ J_I(z) &= \partial Y_I(z) \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

donde  $\alpha$  es cualquier raíz simple del grupo y  $I$  corre sobre el rango de  $G$ . Las  $J_I(z)$  son las corrientes tipo *Cartan* y las  $J_\alpha(z)$  las tipo *Cargadas*. Como ya se mencionó a lo largo de la Tesis, las  $J_\alpha(z)$  están asociadas a aquellos estados que se vuelven livianos en el punto de aumento de simetría, mientras que  $J_I(z)$  son las asociadas a los  $U(1)$  siempre presentes en el espacio de módulos.

Si tomamos cualquier estado de la Teoría de Cuerdas, su operador de vértice asociado será producto directo de vértices externos e internos<sup>1</sup>. Si a la parte interna Left la representamos por el vértice  $\mathcal{O}(z)$  entonces podemos construirnos la representación irreducible en la que este estado transforma a partir de las corrientes  $J_a(z)$ . Físicamente se espera que como el operador de masa  $m^2 = p^2$  conmuta con  $J_\alpha(z)$  (ya que  $p^\mu$  lo hace con toda la parte interna de  $Y^I(z)$ )

<sup>1</sup>Es decir, que dependen de las coordenadas externas de la cuerda  $X^\mu(z)$  o internas  $Y^I(z)$

los estados se organicen en multipletes de  $G$  por niveles de masa. En la teoría conforme se espera que

$$J_a(z)\mathcal{O}_i(w) \sim \frac{T_{ij}^a \mathcal{O}_j(z)}{(z-w)} \quad (6.1.3)$$

donde en el OPE se ha tirado cualquier contribución de potencia en  $(z-w)$  que no contribuya al polo simple. Los índices  $i, j$  corren sobre el multiplete en el que los  $\mathcal{O}_i$  transforman ante  $G$ . Los coeficientes  $T_{ij}^a$  caracterizan a la representación y arman una representación del grupo, i.e. satisfacen

$$[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c \quad (6.1.4)$$

donde el conmutador es el usual para matrices.

Notar que si  $\mathcal{O}_i$  fuesen los vértices de los propios vectores que se vuelven no-masivos en un punto de aumento de simetría, i.e.  $\mathcal{O}_i \rightarrow J_a$ , entonces  $T_{ij}^a = f_{bc}^a$ .

### Ejemplos en $SU(3)$

En teoría de Grupos usual, la representación puede armarse aplicando operadores de bajada sobre el estado de peso máximo  $|\Lambda\rangle$  (ver D.1). Cada operador de bajada está asociado a una raíz simple del grupo. En la teoría conforme tales operadores son las corrientes  $J_{-\alpha}(z)$  para  $\alpha$  simple y positiva.

Veamos el caso  $G = SU(3)$ , el cual ocurrirá como mostraremos en 6.2 para la cuerda compactificada en un toro  $T^2$ . El grupo tiene dos raíces simples positivas  $(\alpha_1, \alpha_2)$  y rango 2. Tomemos al estado de peso máximo dado por  $\Lambda = \omega_1$ , con  $\omega_1$  el primer peso fundamental. Éste debería armar la representación **3** del grupo. En efecto, si el estado de peso máximo viene dado por el operador  $\mathcal{O}_1 =: e^{i\Lambda \cdot Y(z)} :$ , entonces el primer OPE no trivial<sup>2</sup> con las corrientes es

$$J_{-\alpha_1}(z)\mathcal{O}_1 =: e^{i\alpha \cdot Y(z)} :: e^{i\Lambda \cdot Y(w)} : \sim \frac{1}{(z-w)^{\alpha_1 \cdot \Lambda}} : e^{i\alpha \cdot Y(z)} e^{i\Lambda \cdot Y(w)} : \quad (6.1.5)$$

y luego, como  $\alpha_1 \cdot \Lambda = 1$  entonces el término del OPE que solo contiene el polo simple<sup>3</sup> queda

$$J_{-\alpha_1}(z)\mathcal{O}_1 \sim \frac{: e^{i(\Lambda - \alpha_1) \cdot Y(w)} :}{(z-w)} \quad (6.1.6)$$

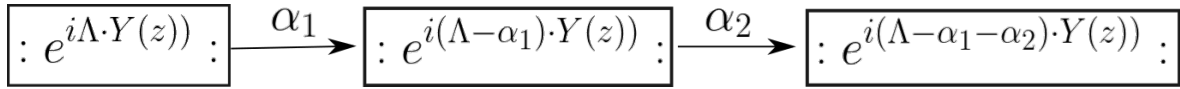
por lo que el siguiente estado en la representación es  $\mathcal{O}_2 =: e^{i(\Lambda - \alpha_1) \cdot Y(w)} :$ . A partir de este la representación se construye de forma recursiva aplicando sucesivamente los operadores de bajada. En este caso, el único OPE no nulo corresponde a

$$J_{-\alpha_2}(z)\mathcal{O}_2 \sim \frac{: e^{i(\Lambda - \alpha_1 - \alpha_2) \cdot Y(w)} :}{(z-w)} \quad (6.1.7)$$

donde por lo tanto, el tercer estado  $\mathcal{O}_3 =: e^{i(\Lambda - \alpha_1 - \alpha_2) \cdot Y(w)} :$ . Finalmente, los OPEs de  $\mathcal{O}_3$  con los operadores de bajada dan cero, completando así la irrep del grupo. En diagrama árbol quedaría como se observa en la Figura 6.1. donde se ven los tres estados del multiplete de la

<sup>2</sup>El OPE con  $J_{-\alpha_2}(z)$  da cero, i.e.  $J_{-\alpha_2}(z)\mathcal{O} \sim 0$

<sup>3</sup>Al desarrollar la exponencial en potencias de  $(z-w)$  solo el orden cero contribuye



**Figura 6.1:** Diagrama árbol de la representación **3** de  $SU(3)$ . Las raíces en las flechas indican que corriente de bajada tiene OPE no nulo con el estado. En cada nodo aparece el estado de la cuerda del multiplete. Puede verse que aparecen estados con el mismo número de osciladores.

**3** y donde además todos tienen la misma cantidad de osciladores (internos)  $N = 0$ .

Otro ejemplo útil para comprender mejor el resto del Capítulo es el caso de la irrep simétrica de  $SU(3)$ , es decir la **6**, el cual involucra solo con osciladores  $N = 0, 1$ , es decir, estarían incluidos en la acción (5.3.31). Ésta viene caracterizada por el estado de peso máximo  $\Lambda = 2\omega_1$ . El esquema árbol de la representación se muestra en la Figura 6.2. Vale la pena seguir la cuenta e ir analizando cada OPE para entender que sucederá con multipletes mayores.

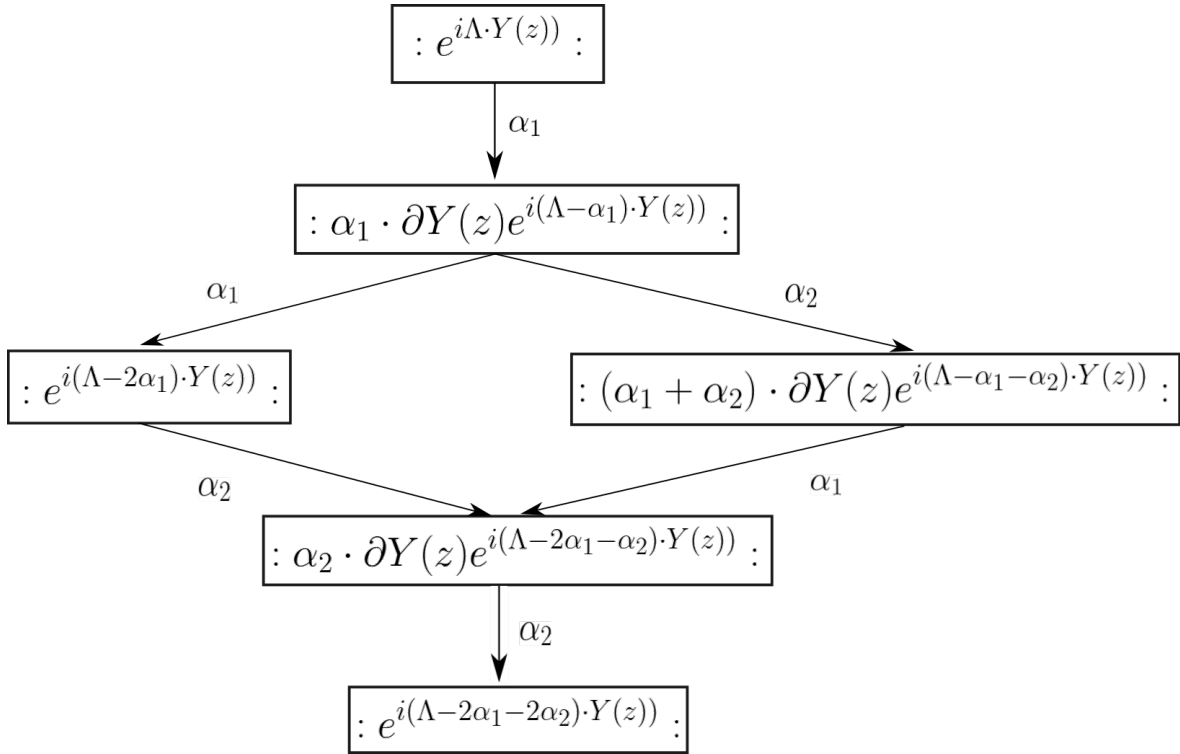
El estado de peso máximo corresponde a  $\mathcal{O}_1 =: e^{i\Lambda \cdot Y(w)}$ . El único OPE no nulo<sup>4</sup> es con  $J_{-\alpha_1}(z)$ , el cual da como resultado (6.1.5), con  $\alpha_1 \cdot \Lambda = 2$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 J_{-\alpha_1}(z)\mathcal{O}_1 &\sim \frac{1}{(z-w)^2} : e^{i\alpha_1 \cdot Y(z)} e^{i\Lambda \cdot Y(w)} : \\
 &= \frac{(1 + i\alpha_1 \cdot \partial Y(w)(z-w) + \dots) e^{i(\Lambda - \alpha_1) \cdot Y(w)}}{(z-w)^2} : \\
 &\sim \frac{\alpha_1 \cdot \partial Y(w) e^{i(\Lambda - \alpha_1) \cdot Y(w)}}{(z-w)} :
 \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

donde nuevamente todo término en la expansión que no contribuya al polo simple es desechado. Vemos entonces que  $\mathcal{O}_2 =: \alpha_1 \cdot \partial Y(w) e^{i(\Lambda - \alpha_1) \cdot Y(w)}$ . Varias cosas a esta altura deben ser mencionadas

- El estado obtenido tiene  $N = 1$ , es decir, ha aumentado el número de osciladores respecto del estado original.
- El producto  $\alpha_1 \cdot \Lambda$  determina la cantidad de osciladores que aparecen en el estado producto del OPE, ya que la exponencial debe desarrollarse para poder leer el polo.
- El estado  $\mathcal{O}_2$ , aparece con una combinación muy específica de osciladores, i.e. aparece con la polarización proporcional a  $\alpha_1$ . Si se calcula la anomalía conforme en el OPE con el tensor de energía-impulso de la CFT, se encuentra que los estados de la forma  $: C \cdot \partial Y(w) e^{ik \cdot Y(w)} :$  tienen un término anómalo proporcional a  $\frac{C \cdot k}{(z-w)^3}$ , que solo es anulado si  $C \cdot k = 0$ . Esta condición deja al estado libre de componente de “estado nulo”, ya que si  $C \sim k$  entonces el estado  $: k \cdot \partial Y(w) e^{ik \cdot Y(w)} := \partial(e^{ik \cdot Y(w)})$  resulta ser una derivada total de una corriente. Como ya mencionamos en el Capítulo 2, estas polarizaciones son absorbidas por otros estados de la cuerda para completar así la cantidad de grados de libertad necesarios del estado masivo en cuestión. Por ejemplo aquí queda explícito que el estado nulo será absorbido por un estado en la **3** de  $SU(3)$ . En general, siempre deberá quedar una polarización física (libre de estados nulos) específica.

<sup>4</sup>Recordar que  $\alpha_2 \cdot \Lambda = 0$ , por lo que el OPE con  $J_{-\alpha_2}(z)$  dará contribución puramente holomorfa.



**Figura 6.2:** Diagrama árbol de la representación **6** de  $SU(3)$ . Las raíces en las flechas indican que corriente de bajada tiene OPE no nulo con el estado. En cada nodo aparece el estado de la cuerda del multiplete. Puede verse que aparecen estados con distinto número de osciladores. Aquellos que tienen un oscilador, aparecen con una polarización específica que resulta ortogonal al momento que lleva la exponencial, dejando al vértice libre de anomalías.

En  $SU(3)$  no quedan muchas opciones ya que solo hay dos direcciones Cartan posibles (en  $\partial Y^I$  resulta  $I = 1, 2$ ), pero en grupos mayores, por ejemplo para compactificaciones de más dimensiones habrá más de una dirección física posible, pues la dirección nula viene dada por  $k$  en la exponencial y las direcciones físicas distintas son todas aquellas que sean ortogonales con  $k^I$  y entre sí.

Continuemos con la construcción del resto de los estados en la **6**. Hay que aplicar las corrientes de bajada a  $\mathcal{O}_2$ , por lo que para eso conviene tener una expresión general del OPE de corrientes con estados de este tipo  $: C \cdot \partial Y(w) e^{ik \cdot Y(w)} :$ . Sea entonces  $\alpha$  una raíz del grupo, entonces

$$\begin{aligned}
 J_{-\alpha}(z) : C \cdot \partial Y(w) e^{ik \cdot Y(w)} : &\sim (z-w)^{-\alpha \cdot k} \left( : C \cdot \partial Y(w) e^{-i\alpha \cdot Y(z)} e^{ik \cdot Y(w)} : + \frac{i\alpha \cdot C}{(z-w)} : e^{-i\alpha \cdot Y(z)} e^{ik \cdot Y(w)} : \right) \\
 &\sim (z-w)^{-\alpha \cdot k} \left( \frac{i(\alpha \cdot C) : e^{i(k-\alpha) \cdot Y(w)} :}{(z-w)} + : [C_I - (C \cdot \alpha)\alpha_I] \partial Y^I e^{i(k-\alpha) \cdot Y(w)} : + high \ spin \right)
 \end{aligned}
 \tag{6.1.9}$$

donde *high spin* indica todas las contribuciones en potencias de  $(z-w)$  positivas que a su vez contienen mayor número de osciladores (mayor cantidad de  $\partial Y$  o de  $\partial^n Y$  con  $n \geq 2$ ). Se observa que si  $\alpha \cdot k \geq 2$  entonces el polo de la expresión (6.1.9) contendrá estados con más de un oscilador, i.e.  $N \geq 2$ , por lo que se tratará de una representación masiva a la que nuestro Lagrangiano del Capítulo 5 no podrá reproducir “bien”, ya que dichos estados no están presentes en la construcción de la misma.

Retomando las cuentas, queda entonces que el OPE de cualquiera de las corrientes con  $\mathcal{O}_2$  da contribución no nula. El proceso continúa de forma recursiva hasta que todos los OPE den resultado nulo, obteniendo el diagrama de la Figura 6.2.

### Polarización Física

Que el estado resultante  $\mathcal{O}$  del OPE con la corriente quede con la polarización física adecuada no es casualidad, de hecho se puede probar fácilmente que siempre resulta así: Si el estado  $: C \cdot \partial Y(w) e^{ik \cdot Y(w)} :$  del cual desciende  $\mathcal{O}$  es físico, entonces  $C \cdot k = 0$ . Si el estado  $\mathcal{O}$  resultante del OPE 6.1.9 es aquel que tiene polarización, entonces es debido a que  $\alpha \cdot k = 1$ . Luego, el estado  $\mathcal{O}$  tiene una polarización  $[C_I - (C \cdot \alpha)\alpha_I]$  y un peso  $k - \alpha$  que satisfacen

$$\begin{aligned} [C_I - (C \cdot \alpha)\alpha_I](k_I - \alpha_I) &= (C \cdot k) - (C \cdot \alpha) - (C \cdot \alpha)(k \cdot \alpha) + \alpha^2(C \cdot \alpha) \\ &= 0 - (C \cdot \alpha) - (C \cdot \alpha)1 + 2(C \cdot \alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir, la polarización con la que aparece  $\mathcal{O}$  ya es física.

Si por otro lado, el estado  $\mathcal{O} =: \epsilon \cdot \partial Y(w) e^{i\mu \cdot Y(w)} :$  proviene de un estado sin osciladores  $: e^{ik \cdot Y(w)} :$  de peso  $k$ , entonces es debido a que en el OPE 6.1.5 resulta  $\alpha \cdot k = 2$ , ya que solo así aparecerá un oscilador producto del desarrollo de la exponencial. El estado  $\mathcal{O}$  obtenido debe satisfacer  $\mu = k - \alpha$  y  $\epsilon = \alpha$  como se ve de 6.1.5. Luego

$$\epsilon \cdot \mu = \alpha \cdot (k - \alpha) = 2 - 2 = 0$$

la polarización queda ortogonal al peso haciendo que el estado sea físico sin componente de estado nulo.

En conclusión, no importa de que estado se parta, con o sin oscilador, siempre el descendiente queda sin componente de estado nulo: o no tiene polarización o si la tiene ésta queda ortogonal al peso dejando al vértice libre de anomalías.

Antes de continuar con el análisis del alcance sobre el sector masivo veamos en detalle que nuestro Lagrangiano interpolador del Capítulo 5 puede reproducir “bien” un ejemplo de los mencionados, el caso de la simétrica de  $SU(3)$  que resulta masiva, cuando la cuerda es compactificada en un toro<sup>5</sup>  $T^2$ .

## 6.2. Aumento de Simetría a $SU(3)$ en el $T^2$

Analicemos un ejemplo concreto de aumento de simetría y veamos como los estados del primer nivel masivo arman el multiplete correspondiente en el Lagrangiano interpolador. Consideremos una compactificación de dos de las dimensiones extras a un toro  $T^2$  (Ver Figura ??).

<sup>5</sup>Podríamos empezar por el caso más simple de la compactificación de una dimensión a  $S^1$  que da lugar a un  $SU(2)$ , pero en este caso, como ya veremos, no habrá ninguna representación masiva que contenga solo estados con hasta un oscilador, por lo que no serán alcanzados por el Lagrangiano interpolador.



Los momentos generalizados son  $\check{\mathbb{P}} = (P^I, p_1, p_2; \tilde{p}^1, \tilde{p}^2)$ . En puntos genéricos del espacio de módulos  $\Phi = (g, b, A)$  cualquier valor de los momentos produce estados masivos. Los vectores no-masivos provienen solamente de los modos cero  $A_\mu^{T(0)} \equiv A_\mu^{I(0)}, A_\mu^{1(0)}, A_\mu^{2(0)}, A_\mu^{\bar{1}(0)}, A_\mu^{\bar{2}(0)}$  los cuales dan lugar al grupo de simetría Abeliano  $U(1)_L^2 \times U(1)_R^2 \times U(1)^{16}$ . Si elegimos en cambio  $\Phi \equiv (g, b, 0)$ , es decir, sin líneas de Wilson, un aumento de simetría aparece dando lugar al grupo de la Heterótica de la siguiente manera: El conjunto  $\check{G}(\Phi)_{480} = \{\check{\mathbb{P}} \equiv (\alpha; 0, 0; 0, 0)\}$ , donde  $\alpha \equiv (\pm 1, \pm 1, 0, \dots)$  son las raíces de  $SO(32)$ , da lugar a vectores no-masivos nuevos. Éstos, junto a los Cartanes, dan lugar al nuevo grupo de simetría  $U(1)_L^2 \times U(1)_R^2 \times SO(32)$ . De la ecuación (5.4) se ve que  $f_{\mathbb{L}-\mathbb{L}I} \equiv f_{\alpha-\alpha I} = \alpha^I$  son las constantes de estructura correctas para Cartanes y vectores cargados. El producto  $\star$  da lugar a las constantes de estructura entre cargados (ver (5.4.11))

$$\tilde{f}_{\mathbb{L}\mathbb{L}_2\mathbb{L}_3} \equiv \tilde{f}_{\alpha\alpha_2\alpha-\alpha_2} = -e^{i\frac{1}{2}P_1EP_2} \quad (6.2.1)$$

donde  $\frac{1}{2}E_{IJ} = \frac{1}{2}(G_{IJ} + B_{IJ})$  es la métrica de Cartan-Weyl de  $SO(32)$  para  $I \geq J$  y cero en cualquier otro caso. Estas se corresponden exáctamente con las constantes de estructura que reproducen el grupo (ver [7]).

Los puntos  $\Phi \equiv (g, b, 0)$  pueden dar lugar a más aumentos de simetría para valores específicos de  $g$  y  $b$ . El que analizaremos en particular<sup>6</sup> en esta sección es el que da lugar a  $U(1)_R^2 \times SU(3) \times SO(32)$ , el cual ocurre cuando

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2.3)$$

Lo llamaremos “el punto  $SU(3)$ ” pues solo cambia el grupo Left respecto del caso anterior. En este punto (ver apéndice D.2 para notación), los momentos Left y Right (C.1.2) resultan

$$l_L^1 = \frac{1}{3}(2p_1 + p_2 + \tilde{p}^1 + \tilde{p}^2), \quad l_L^2 = \frac{1}{3}(p_1 + 2p_2 - \tilde{p}^1 + 2\tilde{p}^2), \quad (6.2.4)$$

$$l_R^1 = \frac{1}{3}(2p_1 + p_2 - 2\tilde{p}^1 + \tilde{p}^2), \quad l_R^2 = \frac{1}{3}(p_1 + 2p_2 - \tilde{p}^1 - \tilde{p}^2), \quad (6.2.5)$$

donde se ha tomado  $\alpha' = 1$  por convención. Los valores de momento KK y winding que dan lugar al aumento de simetría de  $SU(3)$  son

$$\check{\mathbb{P}}_0 = \pm(0; 0, 1; 1, 1), \pm(0; 1, 0; 1, 0), \pm(0; -1, 1; 0, 1). \quad (6.2.6)$$

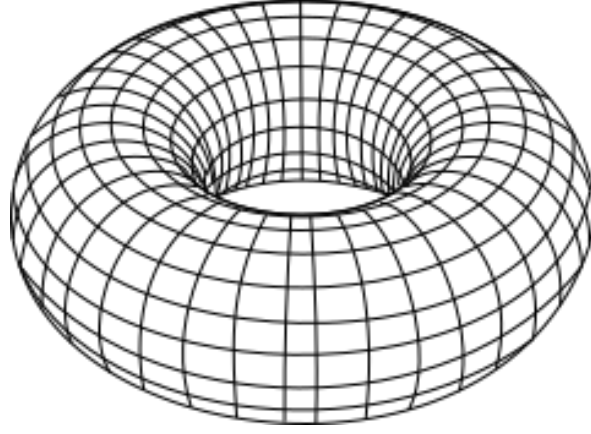
Con ellos se obtiene  $l_R^m = 0$  y  $(l_L^1, l_L^2) = \pm(1, 1), \pm(1, 0), \pm(0, 1)$ . Estos últimos son las coordenadas<sup>7</sup> en la base de las raíces simples  $\alpha_1 = (\sqrt{2}; 0)$ ,  $\alpha_2 = (-1/\sqrt{2}; \sqrt{3/2})$  y satisfacen (ver

<sup>6</sup>Otros puntos de aumento tales como  $U(1)_R^2 \times (SU(2) \times SU(2))_L \times SO(32)$  cuando  $b = 0$  y

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.2.2)$$

pero estamos analizando aquí el caso del  $SU(3)$  donde aparecen constantes de estructura no triviales que provienen de los productos  $\star$ . En los otros casos los cociclos no jugaban ningún papel por lo que son menos ricos en estructura.

<sup>7</sup>Los  $l_L^m$  son coordenadas de los vectores peso en la representación de raíces simples, es decir



**Figura 6.3:** Toro  $T^2$ . Cuando las líneas de Wilson son apagadas y la métrica y la 2-forma interna son las de la ecuación (6.2.3) nuevos estados no-masivos aparecen aumentando el grupo de simetría Left de la Heterótica de  $U(1)^2 \times SO(32)$  a  $SU(3) \times SO(32)$

(6.2.3)  $l_L^2 = l_L^m g_{mn} l_L^m = 2\tilde{p}^m p_m = 2$ . Los vectores no-masivos de  $SU(3)$  son indexados con estos valores. Toda esta información esta presentada en la Tabla 6.1. En particular la raíz  $(1, 1)$  se corresponde con el peso máximo de la representación **8** (adjunta). Si juntamos todos los vectores cargados, los de  $SO(32)$  y éstos, obtenemos

$$\tilde{G}(\Phi_0)_{480+6} = \{(\alpha; 0, 0, 0, 0); \pm(0; 0, 1; 1, 1), \pm(0; 1, 0; 1, 0), \pm(0; -1, 1; 0, 1)\}.$$

el cual da lugar a una acción efectiva  $S_{eff}(\Phi_0)$  con simetría  $U(1)_R^2 \times SU(3)_L \times SO(32)$ .

Veamos ahora lo prometido: Analizar las contribuciones de los estados masivos de (5.3.31) en el punto  $\Phi_0$ . Empecemos mirando el primer nivel masivo, el cual corresponde a una masa  $\alpha' m^2 = \frac{4}{3}$ , la cual claramente es altísima y por eso no se tiene en cuenta en la teoría efectiva de bajas energías.

Un estado que tiene esta masa es  $l_L = (-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ , y no es cualquier, sino que es el estado de peso más bajo de la representación **6** simétrica<sup>8</sup>. Como fue explicado en la sección anterior, usando las corrientes en cuerdas se puede encontrar el resto de los estados que llenan el multiplete de la representación **6**. Al hacerlo, encontramos estados, a los cuales los indexaremos con  $(\Lambda_s, q_R)$  donde  $\Lambda_s = (l_{Ls}^1, l_{Ls}^2)$ ,  $q_R = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$  es la carga Abelina right del  $U(1)_R^2$ , y  $s = 1, \dots, 6$ ,

$$\Lambda_s \equiv (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), (-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}). \quad (6.2.7)$$

Ellos llenan la representación  $\mathbf{6}_{(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})}$  del grupo  $U_R(1)^2 \times SU(3)$ .

Todos tienen la misma masa  $\alpha' m^2 = \frac{4}{3}$  como es de esperarse ya que deben transformar en la misma representación. Lo que no comparten todos es el número de osciladores, por lo que calculemos cuales son para cada uno: Como todos tienen la misma carga Right resulta

---

$\Lambda = l_L^m \alpha_m$  donde  $\alpha_m$  es raíz simple. Por otro lado, los  $l_{Lm} = g_{mn} l_L^m$  se corresponden con coordenadas (Dynkin) en la red dual. Podríamos expresar esto en una base distinta, más familiar para quienes trabajan en teoría de grupo, la base de los pesos. En esta base el estado de peso máximo de la **6**,  $\Lambda = 2\omega_1$  queda con momento Left  $(l_L^1, l_L^2) = (2, 0)$ .

<sup>8</sup>Y  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$  corresponde al de peso máximo de la  $\bar{\mathbf{6}}$ .

$l_R^2 = \frac{2}{3}$ , pero  $l_L^2 = \frac{8}{3}$  para  $s = 1, 3, 6$  mientras que  $l_L^2 = \frac{2}{3}$  para  $s = 2, 4, 5$ . De la fórmula de masa obtenemos que

$$\frac{1}{2}l_{Ls}^2 - \frac{1}{2}l_{Rs}^2 = \frac{1}{2}l_{Ls}^2 - \frac{1}{3} = \tilde{p}_s \cdot p_s = 1 - N_s \quad (6.2.8)$$

y por lo tanto  $N_s = 0$  para  $s = 1, 3, 6$  y  $N_s = 1$  para  $s = 2, 4, 5$ . Es decir, son estados con los que estamos lidiando en nuestros desarrollos en modos GKK, ya que tienen número de oscilador  $N = 0, 1$ . Los resultados anteriores se resumen en la Tabla 6.2.

Índice Dynkin	$(p_1, p_2; \tilde{p}^1, \tilde{p}^2)$	$(l_L^1, l_L^2)$	$N$
$\pm(1, 1)$	$\pm(0, 1; 1, 1)$	$\pm(1, 1) \equiv \pm\alpha_3$	0
$\pm(2, -1)$	$\pm(1, 0; 1, 0)$	$\pm(1, 0) \equiv \pm\alpha_1$	0
$\pm(-1, 2)$	$\pm(-1, 1; 0, 1)$	$\pm(0, 1) \equiv \pm\alpha_2$	0
$2 \times (0, 0)$	$(0, 0; 0, 0)$	$(0, 0)$	1

**Tabla 6.1:**  $\mathbf{8}_{(0,0)}$

r≡índice Dynkinl	$(p_1, p_2; \tilde{p}^1, \tilde{p}^2)$	$(l_L^1, l_L^2)$	$N$
$1 \equiv (2, 0)$	$(0, 1; 2, 1)$	$(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$	0
$2 \equiv (0, 1)$	$(-1, 1; 1, 1)$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	1
$3 \equiv (-2, 2)$	$(-2, 1; 0, 1)$	$(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	0
$4 \equiv (1, -1)$	$(0, 0; 1, 0)$	$(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$	1
$5 \equiv (-1, 0)$	$(-1, 0; 0, 0)$	$(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$	1
$6 \equiv (0, -2)$	$(0, -1; 0, -1)$	$(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$	0

**Tabla 6.2:**  $\mathbf{6}_{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})}$  representation.

Resumen de los datos relevantes para las representaciones  $\mathbf{6}_{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})}$  simétrica y  $\mathbf{8}_{(0,0)}$  adjunta de  $U(1)^2 \times SU(3)$ . En ambas la primera columna indica los pares de coordenadas en el espacio de pesos; la segunda indica los momentos KK y winding; la tercer columna indica los pesos en labase de las raíces; la cuarta columna indica el número de osciladores necesarios para el estado..

Estos estados pueden ser vectores, escalares, etc. Como ilustración mostraremos lo que ocurre con los escalares. Los estados con  $N = 0$  corresponden a modos  $M_{\bar{J}}(x)^{(\Lambda_s, q_R)}$  con  $r = 1, 3, 6$  en la expansión en modos GKK de  $M_{\bar{J}}(x, \mathbb{Y})$  mientras que los estados con  $N = 1$  corresponden a modos  $M_{\bar{J}m}(x)^{(\Lambda_s, q_R)}$ , con  $s = 2, 4, 5$ , en la expansión  $M_{\bar{J}m}(x, \mathbb{Y})$ . Es muy importante notar lo siguiente: en el caso  $N = 1$ , es decir  $M_{\bar{J}m}(x)^{(\Lambda_s, q_R)}$  aparecen dos estados  $m = 1, 2$  para cada modo  $\Lambda_s$  pero solo uno es necesario para armar el multiplete. Por lo tanto, uno espera que solo una combinación de ellos sea la que lo haga (ya mencionamos esto en la sección anterior, donde vimos que la componente que no participa del multiplete corresponde a un estado nulo). Los vértices correspondientes a <sup>9</sup> $M_{\bar{J}m}^{(\Lambda_s)}$  tienen una condición de polarización (proveniente de la cancelación de anomalías). Esta condición se traduce en

$$\Lambda_s^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_s)} = 0 \quad (6.2.9)$$

es decir, que el grado de libertad físico es aquel que es ortogonal a  $\Lambda_s^m$ . En conclusión la combinación que buscamos es aquella ortogonal a  $\Lambda_s^m$ , mientras que la combinación  $\Lambda_s^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_s)}$  deberá desaparecer del Lagrangiano, por ejemplo, via absorción por parte de otro campo para formar una representación masiva.

<sup>9</sup>A partir de ahora no copiaremos más  $q_R$  por simplicidad en la notación. Además todos los estados involucrados en este análisis comparten su valor de  $q_R$ .

Volvamos con nuestro análisis. El punto clave es mirar las derivadas covariantes de los escalares en nuestro Lagrangiano (5.3.31), si éstas además de reproducir las correspondientes a la representación **8** de para los no-masivos pueden, *al mismo tiempo*, reproducir la **6** habremos mostrado que (5.3.31) porta información no trivial sobre los estados masivos. Para los modos  $N = 0$ , es  $s = 1, 3, 6$  y debemos mirar entonces la expresión (5.4.18). Resulta, al desarrollar en modos GKK:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu M_J^{(\Lambda_s)} &= \partial_\mu M_J^{(\Lambda_s)} + ig \sum_l^I \tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_l \Lambda_s - \alpha_l} A_\mu^{(\alpha_l)} M_J^{(\Lambda_s - \alpha_l)} \\ &+ ig \sum_l^I \tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_l \Lambda_s - \alpha_l} A_\mu^{(\alpha_l)} \alpha_l^m M_{mJ}^{(\Lambda_s - \alpha_l)} + ig \Lambda_{sm} A_\mu^{m(0)} M_J^{(\Lambda_s)} + ig q_{R\bar{I}} A_\mu^{\bar{I}(0)} M_J^{(\Lambda_s)} + \dots \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

donde solamente hemos mostrado los términos que acoplan con los vectores de gauge  $U_R(1)^2 \times SU(3)$ , los (...) codifican todo el resto.

Por otro lado, para estados con  $N = 1$ , es  $s = 2, 4, 5$ , y de (5.4.20) resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu M_{mJ}^{(\Lambda_s)} &= \partial_\mu M_{mJ}^{(\Lambda_s)} + ig \sum_l^I \tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_l \Lambda_s - \alpha_l} A_\mu^{(\alpha_l)} \alpha_l^m M_J^{(\Lambda_s - \alpha_l)} \\ &+ ig \sum_l^I \tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_l \Lambda_s - \alpha_l} A_\mu^{(\alpha_l)} M_{mJ}^{(\Lambda_s - \alpha_l)} + ig \sum_l^I \tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_l \Lambda_s - \alpha_l} \alpha_l^n (\Lambda_{s,m} - \alpha_{l,m}) A_\mu^{(\alpha_l)} M_{nJ}^{(\Lambda_s - \alpha_l)} \\ &+ ig \Lambda_{sk} A_\mu^{k(0)} M_{mJ}^{(\Lambda_s)} + ig q_{R\bar{I}} A_\mu^{\bar{I}(0)} M_{mJ}^{(\Lambda_s)} + \dots \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

En ambos casos, el último término es el acoplamiento esperado con los vectores  $U(1)_R^2$ . Los índices  $\alpha_l$  indexan los 6 vectores cargados de  $SU(3)$  en correspondencia con las raíces de  $SU(3)$  donde  $\alpha_4 = -\alpha_1, \alpha_5 = -\alpha_2, \alpha_6 = -\alpha_3$  (ver Tabla 6.1). Los  $A_\mu^{m(0)}$  son los vectores Cartan de gauge.

Antes de demostrar que las expresiones anteriores rearman la derivada covariante de escalares en la representación **6**, recordemos que forma tiene tal derivada. Si tenemos un campo escalar covariante  $\Phi^s$ , su derivada se lee

$$\mathcal{D}_\mu \Phi^s = \partial_\mu \Phi^s + ig(T_{\alpha_l})_{sr} A_\mu^{(\alpha_l)} \Phi^r + ig(T_I)_{sr} A_\mu^I \Phi^r, \quad (6.2.12)$$

donde  $T_{\alpha_l}$  y  $T_I$  son las matrices de generadores cargados y Cartanes (respectivamente) correspondientes a la representación, en este caso la **6**, de  $SU(3)$ . Éstas se muestran (en la base Cartan-Weyl) en el Apéndice D.2.

Miremos el primer caso de (6.2.10) ara  $M_J^{(\Lambda_1)}$ . Éste se lee<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu M_J^{(\Lambda_1)} &= \partial_\mu M_J^{(\Lambda_1)} + ig \tilde{f}_{1\alpha_3 4} A_\mu^{(\alpha_3)} \alpha_3^m M_{mJ}^{(\Lambda_4)} + ig \tilde{f}_{1\alpha_1 2} A_\mu^{(\alpha_1)} \alpha_1^m M_{mJ}^{(\Lambda_2)} \\ &+ ig(\sqrt{2} A_\mu^{1(0)} + \sqrt{\frac{2}{3}} A_\mu^{2(0)}) M_J^{(\Lambda_1)} \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

<sup>10</sup>Por simplicidad en la notación, definimos  $\tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_j \Lambda_r} = \tilde{f}_{s \alpha_j r}$

donde usamos que  $\Lambda_1 = \frac{4}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ . Calculando las  $\tilde{f}$  usando el producto  $\star$ , vemos que  $\tilde{f}_{1\alpha_1 2} = \tilde{f}_{1\alpha_3 4} = 1$  y haciendo las siguientes redefiniciones

$$\Phi_J^1 = M_J^{(\Lambda_1)}, \quad \Phi_J^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_2)}, \quad \Phi_J^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_4)} \quad (6.2.14)$$

nuestra derivada se corresponde exáctamente con a la forma de (6.2.12) ya que  $(T_{\alpha_1})_{12} = (T_{\alpha_3})_{14} = \sqrt{2}$  y  $(T_1)_{11} = \sqrt{2}$ ,  $(T_2)_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}}$  (ver (D.2.5)). Es decir, nuestra derivada reproduce exáctamente la derivada covariante en la representación **6** para el primer escalar. De todas maneras debemos mostrar, por consistencia, que el resto de las seis derivadas también rearmen (6.2.12).

Antes de seguir, notemos que las combinaciones  $\Phi_J^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_2)}$  y  $\Phi_J^4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_4)}$ , como hemos mencionado previamente, seleccionan una combinación específica para el grado de libertad que transforma en la representación. Estas son *exáctamente* las combinaciones ortogonales a  $\Lambda_s$  que esperamos de la condición física  $\Lambda_s^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_s)} = 0$ , es decir, la combinación se hace via  $\alpha_l$  que cumplen  $\alpha_l \cdot \Lambda_s = 0$ .

Sigamos con la derivada covariante para  $\Phi_J^2$ . En el caso anterior hemos visto que combinación de escalares lo produce. Por lo tanto debemos proyectar la derivada de los  $M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_2)}$  en esa dirección<sup>11</sup>, y haciendolo en (5.4.20) encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \Phi_J^2 &= \partial_\mu \Phi_J^2 + ig \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{f}_{2(-\alpha_1)1} A_\mu^{(-\alpha_1)} (\alpha_1^2) M_J^{(\Lambda_1)} + ig \tilde{f}_{2\alpha_3 5} A_\mu^{(\alpha_3)} \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_1^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_5)} \\ &+ ig \tilde{f}_{2\alpha_2 4} A_\mu^{(\alpha_2)} \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1^m + \alpha_2^m) M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_4)} + ig \tilde{f}_{2\alpha_1 3} A_\mu^{(\alpha_1)} \frac{2}{\sqrt{2}} \alpha_1^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_3)} + ig \sqrt{\frac{2}{3}} A_\mu^{2(0)} \Phi_J^2 \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Vemos que  $(T_1)_{22} = 0$ ,  $(T_2)_{22} = \sqrt{\frac{2}{3}}$  como es esperado de (D.2.5). También, calculando las  $\tilde{f}$  tenemos que  $\tilde{f}_{2(-\alpha_1)1} = -\tilde{f}_{2\alpha_3 5} = \tilde{f}_{2\alpha_2 4} = \tilde{f}_{2\alpha_1 3} = 1$ , y por consistencia deberíamos definir

$$\Phi_J^3 = M_J^{(\Lambda_3)}, \quad \Phi_J^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_4)}, \quad \Phi_J^5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_5)} \quad (6.2.17)$$

para así obtener  $(T_{-\alpha_1})_{21} = \sqrt{2}$  y  $(T_{\alpha_2})_{24} = (T_{\alpha_3})_{25} = 1$  (ver (D.2.5)). Ya habíamos definido  $\Phi_J^4$  en (6.2.14), por lo que podríamos haber llegado a una contradicción, pero no fue el caso ya que la misma combinación es la que se arma.

Resumiendo, para armar el resto de las derivadas covariantes tendremos que seguir defi-

<sup>11</sup>Con proyectar queremos decir lo siguiente: Este grado de libertad aparece en el Lagrangiano contraído así  $\mathcal{D}_\mu M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_2)} \mathcal{D}_\mu M_{m\bar{J}}^{(-\Lambda_2)}$ , por lo que podemos elegir descomponer la suma en  $m$  de la siguiente manera

$$\mathcal{D}_\mu M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_2)} \mathcal{D}_\mu M_{m\bar{J}}^{(-\Lambda_2)} = (\mathcal{D}_\mu \Phi_J^2)(\mathcal{D}_\mu \Phi_J^2)^* + \mathcal{D}_\mu (\Lambda_2 \cdot M_J^{(\Lambda_2)}) \mathcal{D}_\mu (\Lambda_2 \cdot M_J^{(\Lambda_2)})^* \quad (6.2.15)$$

donde esperamos que el segundo término sea absorbido por algún otro grado de libertad para completar una representación masiva, como ocurre en cuerdas, garantizando así que el grado de libertad  $\Lambda \cdot M_J^\Lambda$  desaparezca del lagrangino.

niendo los  $\Phi^s$ . A continuación presentamos los resultados

$$\begin{aligned}\Phi_J^s &= M_J^{(\Lambda_s)}, \quad s = 1, 3, 6 \\ \Phi_J^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_2)}, \quad \Phi_J^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_4)}, \quad \Phi_J^5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_5)}.\end{aligned}\tag{6.2.18}$$

Todos los  $\alpha_l$  que aparecen contrídos con  $M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_s)}$  satisfacen  $\alpha_l \cdot \Lambda_s = 0$ . Es decir, seleccionan el grado de libertad físico de  $M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_s)}$  ortogonal a  $\Lambda_s$  como se espera. Computando el resto de las seis derivadas se encuentra total correspondencia con (6.2.12).

En conclusión, hemos mostrado que nuestro Lagrangiano (5.3.31) da lugar, al desarrollar en modos GKK, al grupo de simetría  $SU(3)$ , arma las derivadas covariantes de todos los estados no-masivos (representación **8**) y al mismo tiempo, arma las derivadas covariantes de la representación **6** para los estados masivos (del primer nivel) correspondientes. Todo esto está codificado via la no-conmutatividad y el desarrollo GKK.

**Sobre Vectores Masivos.** Como los vectores tienen el mismo desarrollo GKK que los escalares, el mismo razonamiento aplicado anteriormente puede ser utilizado para ellos, con el objetivo de mostrar que las derivadas covariantes de vectores masivos también se obtienen de (5.4.11) y (5.4.17). Es solo cuestión de reemplazar en (6.2.19) con  $M_J^{(\Lambda_s)} \rightarrow A_\mu^{(\Lambda_s)}$  y  $M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_s)} \rightarrow A_\mu^{m(\Lambda_s)}$ . Es decir,  $A_\mu^s = A_\mu^{(\Lambda_s)}$  para  $s = 1, 3, 6$  y  $A_\mu^s = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_l^m A_{m\mu}^{(\Lambda_s)}$  para  $s = 2, 4, 5$  donde  $\alpha_l \cdot \Lambda_s = 0$ . Además aquel que arme el grado de libertad de la representación satisface

$$\Lambda_s^m A_{m\mu}^{(\Lambda_s)} = 0.\tag{6.2.19}$$

**Sobre la Ortogonalidad con  $\Lambda_s$ .** Hemos dicho que tal condición proviene de cuerdas. Más específicamente ocurre debido a que el OPE de estos estados con el tensor de energía-momento da lugar a una anomalía conforme proporcional a  $\frac{1}{z^3}\Lambda_s^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_s)}$  para  $s = 2, 4, 5$  (y para vectores  $\frac{1}{z^3}\Lambda_s^m A_{m\mu}^{(\Lambda_s)}$ ), la cual al cancelarse la impone.

Por otro lado hemos mostrado que siempre podemos separar en el Lagrangiano las componentes físicas esperando que las ortogonales sean absorbidas. Por ejemplo, para  $M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_4)}$  podemos considerar las combinaciones *ortogonales*  $(\alpha_1 - \alpha_2)^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_4)} = \Lambda_4^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_4)}$  y  $(\alpha_1 + \alpha_2)^m M_{m\bar{J}}^{(\Lambda_4)}$ . La segunda da lugar a  $\Phi_J^4$  mientras que la otra no debería estar presente (análogamente para vectores). El mismo razonamiento se aplica para  $s = 2, 4, 5$ .

Ahora recordemos que las primeras dos filas de (5.3.5) contienen modos masivos de los gravitones y del Kalb-Ramond  $g_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})}, B_{\mu\nu}^{(\mathbb{L})}$ . Ellos satisfacen  $\mathbb{L}^2 = l_l^2 - l_R^2 = 0$  según su LMC. Puede verse fácilmente, que el primer nivel masivo corresponde a tener masa  $\alpha' m^2 = \frac{4}{3}$  y se corresponde con los pesos  $\pm\Lambda_s$  para  $s = 2, 4, 5$  y cargas  $q_R = \pm(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$  ante el  $U(1)_R^2$ .

Con esto en mente, el desacople puede ser entendido (ver [49]) de la siguiente manera: El escalar  $\Lambda_s \cdot M_J^{(\Lambda_s)}$  es “comido” por el correspondiente vector (su equivalente  $A_\mu^{(\Lambda_s)}$ ) para adquirir la polarización longitudinal de un vector masivo. Al mismo tiempo, el gravitón  $g_{\mu\nu}^{(\Lambda_s)}$  “come” a este vector para volverse masivo con la cantidad correcta de grados de libertad. De hecho, esto fue mostrado en el Capítulo 2 (y en [49]), donde veíamos que lo que ocurría era que el

vector se redefinía mediante

$$A_{m\mu}'^{(\Lambda_s)} = A_{\mu}^{(\Lambda_s)} - \frac{1}{m^2} \partial_{\mu} (\Lambda_s \cdot M_j^{(\Lambda_s)} M_m^{(\Lambda_s)\bar{j}}) \quad (6.2.20)$$

de tal manera que la proyección  $\Lambda_s \cdot A_{\mu}'^{(\Lambda_s)}$  era “comida” por el gravitón masivo

$$g_{\mu\nu}^s = g_{\mu\nu}^{(\Lambda_s)} - \frac{1}{m^2} \Lambda_s \cdot \partial_{(\nu} A_{\mu)}'^{(\Lambda_s)} \quad (6.2.21)$$

y el grado de libertad remanente  $A^s \propto \alpha_l \cdot A_{m\mu}'^{(\Lambda_s)}$ , con  $\alpha_l \cdot \Lambda_s = 0$  satisface  $\partial_{\mu} A'^{\mu s} = 0$ .

## 6.3. Irreps Masivas con hasta un Oscilador

Si queremos ver que el Lagrangiano interpolador puede reproducir “bien” los multipletes masivos que contengan estados con hasta un oscilador debemos averiguar primero que representaciones masivas en los grupos de aumento de simetría cumplen esta condición. Para eso notemos que los OPEs (6.1.5) y (6.1.9) son todo lo que se necesita.

Podemos realizar el siguiente algoritmo: Partiendo de un estado de peso máximo  $\Lambda = \sum_i n_i \omega_i$ , con  $n_i \in \mathbb{Z}_{>0}$  caracterizado por el vértice  $\mathcal{O} =: e^{i\Lambda \cdot Y(z)}$ : podemos utilizar (6.1.5) y (6.1.9) para ir armando la representación. En el momento que aparezca en el OPE más de un oscilador damos por descartada a la representación como candidata a ser una llena solo con estados de hasta un oscilador. La condición para ver directamente del OPE cuando aparece tal situación viene dada por el producto de la raíz de bajada aplicada al peso del estado (como ya fue mencionado). Este algoritmo fue programado en Python3. Naturalmente el código es recursivo.

El resultado que se encuentra al explorar distintas representaciones, es que aquellas que tienen solo estados de hasta un oscilador son aquellas que vienen dadas por los siguientes pesos máximos

- $\Lambda = \omega_j$  con  $j = 1, \dots, n = \text{rang}(G)$ . Son las llamadas representaciones *unitarias*, que en el estudio del caracter de la la teoría conforme el resto de las representaciones se desprende de ellas.
- $\Lambda = \omega_1 + \omega_j$  con  $j = 1, \dots, n = \text{rang}(G)$ . Notar que la simétrica  $\Lambda = 2\omega_1$  está incluida en este caso. También la adjunta  $\Lambda = \omega_1 + \omega_n$ .
- $\Lambda = \omega_n + \omega_j$  con  $j = 1, \dots, n = \text{rang}(G)$ . Estas son simplemente el “reflejo” de la anterior. Tiene en común el caso de la adjunta y por supuesto la conjugada de la simétrica  $\Lambda = 2\omega_n$ .

Es importante señalar que, para los grupos  $SU(n)$ , hay una “cota” máxima sobre las posibles representaciones masivas que tengan hasta un oscilador. Si el estado de peso máximo es  $\Lambda = \sum_i n_i \omega_i$ , con  $n_i \in \mathbb{Z}_{>0}$  y llegase a haber algún  $n_i \geq 2$  entonces el OPE con  $J_{-\alpha_i}$  daría inmediatamente un estado con más de un oscilador, pues en (6.1.5) sería  $\alpha_i \cdot \Lambda = n_i \geq 2$ ,



por lo que habría que desarrollar la exponencial a segundo orden. Por lo tanto, solo hay que explorar  $3^{rang(G)}$  posibilidades.

Veamos ahora un argumento para entender porque aparecen estos casos. Primero mostremos cuales *no* pueden aparecer. Para lograrlo iremos dividiendo la demostración en partes hasta agotar posibilidades y quedarnos así con los mencionados arriba.

1. Si  $n_i = 2$  entonces  $n_{j \neq i} = 0$ <sup>12</sup>

Supongamos que no. Entonces  $\exists j$  tal que  $n_{j \neq i} \neq 0$ . Si  $j > i$ , definimos  $\tilde{\alpha} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$ , la cual es raíz del grupo, por ser suma de raíces consecutivas. Luego aplicamos la corriente de bajada  $J_{-\tilde{\alpha}}(z)$  al estado de peso máximo, usando (6.1.5)

$$J_{-\tilde{\alpha}}(z) : e^{i(2\omega_i + n_j \omega_j) \cdot Y(w)} : \sim \frac{1}{(z-w)^{\tilde{\alpha} \cdot (2\omega_i + n_j \omega_j)}} \left( \dots \right)$$

Como  $\tilde{\alpha} \cdot (2\omega_i + n_j \omega_j) = 2 + n_j \geq 3$  entonces es necesario desarrollar la exponencial a mayor orden y aparece más de un oscilador. Si hubiese habido más de un  $n_j$  entonces quedaría trivialmente la suma de ellos empeorando aún más la potencia y necesitando así más osciladores.

Si  $i > j$  se define  $\tilde{\alpha} = \alpha_j + \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_i$  y se procede igual que antes.

2. Si  $n_i = 2$  entonces  $i = 1$  o  $i = rang(G)$ .

Supongamos que no. Sea entonces sea  $\alpha = \sum_{j=1}^{rang(G)} \alpha_j$ , la cual es raíz del grupo. Luego aplicamos la corriente de bajada  $J_{-\alpha}(z)$  al estado de peso máximo :  $e^{i2\omega_i \cdot Y(w)}$  :, que tiene esta forma ya que como mostramos arriba, si algún  $n_i = 2$  entonces es el único. En efecto, usando (6.1.5) queda

$$J_{-\alpha}(z) : e^{i2\omega_i \cdot Y(w)} : \sim : \alpha \partial Y(w) e^{i(2\omega_i - \alpha) \cdot Y(w)} :$$

Finalmente, si al estado resultante le aplicamos la corriente de bajada  $J_{-\alpha_i}(z)$  usando (6.1.9) queda

$$J_{-\alpha_i}(z) : \alpha \partial Y(w) e^{i(2\omega_i - \alpha) \cdot Y(w)} : \sim \frac{1}{(z-w)^{\alpha_i \cdot (2\omega_i - \alpha)}} \left( \dots \right)$$

Ahora si  $i \neq 1$  o  $i \neq rang(G)$  entonces  $\alpha_i \cdot (2\omega_i - \alpha) = 2$  y por lo tanto hay más de un oscilador.<sup>13</sup>

3. No pueden, simultáneamente, ser no triviales más de dos  $n_k$ . Es decir, a lo sumo  $\Lambda = n_i \omega_i + n_j \omega_j$  para algún par  $(i, j)$  con  $n_{i,j} \in \{0; 1\}$ .

Supongamos que no. Entonces en  $\Lambda = \sum_i n_i \omega_i$  hay al menos tres  $n_i \geq 1$ . Sea, como antes,  $\alpha = \sum_{j=1}^{rang(G)} \alpha_j$ . Luego

$$J_{-\alpha}(z) : e^{i\Lambda \cdot Y(w)} : \sim \frac{1}{(z-w)^{\alpha \cdot \Lambda}} \left( \dots \right)$$

<sup>12</sup>Al menos uno, si hay más de uno la demostración vale igual como se ve fácilmente.

<sup>13</sup>En estos casos resulta  $\alpha_i \cdot \alpha = 0$ , si por el contrario  $i = 1$  entonces  $\alpha_i \cdot \alpha = -1$



y como  $\alpha \cdot \Lambda = \sum_i n_i \geq 3$  resulta haber más de un oscilador en la representación. Ergo, solo dos coeficientes pueden satisfacer  $2 > n_i \geq 1$ .

4. Si  $\Lambda = n_i \omega_i + n_j \omega_j$ , con  $i \neq j$  y  $n_{i,j} = 1$ , entonces  $i = 1$  o  $i = \text{rang}(G)$ .

Nuevamente, por el absurdo. Aplicamos  $J_{-\alpha}(z)$  definida arriba, al estado de peso máximo usando (6.1.5) y se obtiene el estado  $\mathcal{O} =: \alpha \cdot \partial Y(w) e^{i(\omega_i + \omega_j - \alpha) \cdot Y(w)}$ . Luego aplicamos a  $\mathcal{O}$  el operador de bajada  $J_{-\tilde{\alpha}}(z)$  definido anteriormente utilizando (6.1.9) quedando

$$J_{-\tilde{\alpha}}(z) \mathcal{O} \sim \frac{1}{(z-w)^{\tilde{\alpha} \cdot (\omega_i + \omega_j - \alpha)}} (\dots).$$

El exponente  $\tilde{\alpha} \cdot (\omega_i + \omega_j - \alpha)$  puede calcularse fácilmente. Primero, notar que  $\tilde{\alpha} \cdot (\omega_i + \omega_j) = 2$ . Ahora, como  $i, j \notin \{1; \text{rang}(G)\}$  por hipótesis, entonces por su definición resulta  $\alpha = a + \tilde{\alpha} + b$ , donde  $a = \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k$  y  $b = \sum_{k=j+1}^{\text{rang}(G)} \alpha_k$  son raíces del grupo. Luego

$$\tilde{\alpha} \cdot \alpha = \tilde{\alpha} \cdot a + \tilde{\alpha}^2 + \tilde{\alpha} \cdot b = -1 + 2 - 1 = 0$$

Por lo tanto el exponente del OPE da como resultado 2, dando lugar así a estados con mayor número de osciladores. Si  $i = 1 \vee \text{rang}(G)$  entonces  $a = 0 \vee b = 0$  por lo que  $\tilde{\alpha} \cdot \alpha > 0$ , y como resultado no se puede afirmar que se necesiten más osciladores. Ergo  $i = 1 \vee \text{rang}(G)$ .

Con esta última demostración hemos agotado los casos posibles. Solo los tres casos ya mencionados arriba quedan como candidatos a tener hasta un oscilador en la representación.<sup>14</sup>. En el Apéndice D.3 se da una demostración de que en las representaciones dadas por el peso máximo  $\Lambda = \omega_j$ , i.e. las unitarias, todos los estados de la irrep tienen el mismo número de osciladores.

Mostremos ahora que las irreps de la forma  $\Lambda = \omega_1 + \omega_j$  tienen siempre hasta un oscilador. Los estados en estas representaciones tienen pesos  $\mu$ , los cuales vistos desde Teoría de Cuerdas son los momentos Left internos. Estos pesos tienen una longitud dada por la métrica de Cartan, pero más que su longitud nos interesa ver su longitud cuadrado  $\mu^2$ . Puede demostrarse matemáticamente que tales irreps tienen solo dos posibles valores de  $\mu^2$  calculadas sobre el conjunto de pesos dentro de las mismas.

En cuerdas debe suceder que todos los estados dentro de la irrep tengan la misma masa Left

$$m_L^2 = \frac{\mu^2}{2} + (N - 1)$$

Los estados que tienen distintos valores de  $\mu^2$  deben compensar incrementando el número de osciladores Left para mantener la misma masa. Por lo tanto basta ver cuánto puede variar como mucho la longitud de los pesos dentro de la irrep. Sean  $\mu_{max}^2$  y  $\mu_{min}^2$  los valores de máxima y mínima longitud cuadrado dentro de la irrep. Luego, si mostramos que  $\frac{\mu_{max}^2 - \mu_{min}^2}{2} < 2$  habremos terminado con la demostración. En efecto, si esto ocurre implica que el número de

<sup>14</sup>Notar que no hemos mostrado que cumplen con esta propiedad, sino que hemos mostrado que representaciones *no* la cumplen.

osciladores Left  $N$  (el cual cambia de a enteros) no puede variar en más de una unidad de manera tal que la masa Left sea la misma.

Sea  $\mu_{max} = \omega_1 + \omega_j$  el peso máximo de la irrep y sea  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_j$  una raíz del grupo. Luego, el aplicando el operador de bajada de raíz  $\alpha$  sobre el estado de peso máximo se obtiene un estado no nulo (pues  $\mu_{max} \cdot \alpha = 2$ ) de peso  $\mu_{min} = \mu_{max} - \alpha$ . La longitud cuadrado de este último es

$$\begin{aligned}\mu_{min}^2 &= \mu_{max}^2 + \alpha^2 - 2\alpha \cdot \mu_{max} \\ &= \mu_{max}^2 + 2 - 4 = \mu_{max}^2 - 2\end{aligned}\tag{6.3.1}$$

Por lo tanto, como este peso tiene longitud distinta al de peso máximo y en estas irreps solo hay dos longitudes posibles, resulta este peso ser el de mínima longitud. Luego, se desprende automáticamente que  $\frac{\mu_{max}^2 - \mu_{min}^2}{2} < 2$  se satisface mostrando así que estás irreps (y sus conjugadas) tienen estados con hasta un oscilador.

## 6.4. Multipletes en el Lagrangiano

En esta sección mostraremos que el Lagrangiano interpolador logra reproducir todas las derivadas covariantes de representaciones masivas caracterizadas por un peso máximo  $\Lambda = \omega_1 + \omega_j$  o  $\Lambda = \omega_j + \omega_{rang(G)}$ . Esencialmente repetiremos el mismo proceso que el mostrado en el ejemplo del toro  $T^2$  viendo como en general luego de seleccionar las polarizaciones que dan lugar a los estados dentro de la irrep los acoplamientos resultantes dan lugar a los  $T_{ij}^a$  adecuados.

Analicemos primero los coeficientes de la expresión (6.2.10)

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu M_J^{(\Lambda_s)} &= \partial_\mu M_J^{(\Lambda_s)} + ig \sum_l \tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_l \Lambda_s - \alpha_l} A_\mu^{(\alpha_l)} M_J^{(\Lambda_s - \alpha_l)} \\ &+ ig \sum_l \tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_l \Lambda_s - \alpha_l} A_\mu^{(\alpha_l)} \alpha_l^m M_{mJ}^{(\Lambda_s - \alpha_l)} + ig \Lambda_{sm} A_\mu^{m(0)} M_J^{(\Lambda_s)} + ig q_{R\bar{I}} A_\mu^{\bar{I}(0)} M_J^{(\Lambda_s)} + \dots\end{aligned}$$

Vale recordar, que por conservación de impulso, en las sumatorias solo aparecen aquellos acoplamientos que satisfacen tanto la LMC como clausura de momentos Left y Right. Por lo tanto, analizaremos cada término suponiendo que conserva impulso, de no hacerlo simplemente no aparecería en la suma y no habría nada que probar.

Los últimos dos términos de esta expresión corresponden a la parte  $U(1)$ , uno perteneciente al grupo de simetría  $G$  aumentado y el otro a la parte Right siempre presente. Notar que según esto,  $(T_I)_{sr} = \delta_{sr} \Lambda_{s,r}$  siendo esta la expresión adecuada para los generadores.

El término proporcional a  $A_\mu^{(\alpha_l)} \alpha_l^m M_{mJ}^{(\Lambda_s - \alpha_l)}$ , selecciona sobre los grados de libertad de los escalares aquel en la dirección  $\alpha_l^m$  con un coeficiente  $\tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_l \Lambda_s - \alpha_l}$ . Vemos del OPE (6.1.8) que si se parte de un estado “cargado” y se llega a uno con osciladores, este último debe aparecer en la dirección del momento Left del cargado original.

Finalmente, un argumento similar al anterior se aplica para el término restante proporcional a  $A_\mu^{(\alpha_l)} M_J^{(\Lambda_s - \alpha_l)}$ , el cual se desprende del OPE (6.1.5) que aparece con el coeficiente

adecuado.

Analicemos ahora las contribuciones provenientes de

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu M_{m\bar{j}}^{(\Lambda_s)} &= \partial_\mu M_{m\bar{j}}^{(\Lambda_s)} + ig \sum_l^I \tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_l \Lambda_s - \alpha_l} A_\mu^{(\alpha_l)} \alpha_l^m M_{\bar{j}}^{(\Lambda_s - \alpha_l)} \\
&+ ig \sum_l^I \tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_l \Lambda_s - \alpha_l} A_\mu^{(\alpha_l)} M_{m\bar{j}}^{(\Lambda_s - \alpha_l)} + ig \sum_l^I \tilde{f}_{\Lambda_s \alpha_l \Lambda_s - \alpha_l} \alpha_l^n (\Lambda_{s,m} - \alpha_{l,m}) A_\mu^{(\alpha_l)} M_{n\bar{j}}^{(\Lambda_s - \alpha_l)} \\
&+ ig \Lambda_{sk} A_\mu^{k(0)} M_{m\bar{j}}^{(\Lambda_s)} + ig q_{R\bar{l}} A_\mu^{\bar{l}(0)} M_{m\bar{j}}^{(\Lambda_s)} + \dots
\end{aligned} \tag{6.4.1}$$

Lo primero a analizar es como descomponer a  $\mathcal{D}_\mu M_{m\bar{j}}^{(\Lambda_s)}$  en direcciones físicas. Sea  $C_m$  una posible polarización física para el escalar  $M_{m\bar{j}}^{(\Lambda_s)}$  dentro de las irreps en estudio, por lo tanto debe suceder que  $C \cdot \Lambda = 0$ . Al proyectar en la dirección de  $C$  deben armarse apropiadamente los grados de libertad masivos que aparecen en la irrep. El primer término no trivial es el proporcional a  $A_\mu^{(\alpha_l)} \alpha_l^m M_{\bar{j}}^{(\Lambda_s - \alpha_l)}$ , el cual al ser proyectado con  $C^m$  resulta en  $(C \cdot \alpha_l) A_\mu^{(\alpha_l)} M_{\bar{j}}^{(\Lambda_s - \alpha_l)}$ . Del OPE (6.1.9) vemos que en el caso de conservar impulso dando lugar a un estado sin osciladores  $M_{\bar{j}}^{(\Lambda_s - \alpha_l)}$ , el coeficiente resultante, además de la fase del cociclo, es el apropiado.

Los próximos términos a analizar corresponden a los de la segunda fila. Al proyectar con  $C^m$  se obtiene, a menos de la fase del cociclo, la siguiente contribución

$$A_\mu^{(\alpha_l)} (C^m + [C \cdot \Lambda_s - C \cdot \alpha_l] \alpha_l^m) M_{m\bar{j}}^{(\Lambda_s)} = A_\mu^{(\alpha_l)} (C^m - [C \cdot \alpha_l] \alpha_l^m) M_{m\bar{j}}^{(\Lambda_s)} \tag{6.4.2}$$

donde la igualdad vale pues  $C \cdot \Lambda = 0$ . Usando el OPE (6.1.9) notamos que el grado de libertad que se arma con polarización  $(C^m - [C \cdot \alpha_l] \alpha_l^m)$  es el adecuado<sup>15</sup>.

La última contribución a analizar es la correspondiente a la parte Abelian y ya fue estudiada al principio de esta Sección.

Por lo tanto queda demostrado que las derivadas covariantes de irreps masivas de peso máximo  $\Lambda = \omega_1 + \omega_j$  y sus conjugadas se arman correctamente en el Lagrangiano.

## 6.5. Simetría Oculta

La idea de que los modos de los estados en cuerdas se acomoden de manera extraordinaria para armar multipletes de las simetrías en los puntos de aumento del espacio de módulos es más que asombrosa. Se podría pensar que no es una simple casualidad, sino que la teoría posee una simetría que se manifiesta de esa manera en los puntos de aumento, tomando la forma de distintos grupos de gauge en el sector no-masivo. Ya hemos tenido evidencia de ello antes en esta tesis, cuando mostramos que los flujos generalizados obtenidos en las compactificaciones

<sup>15</sup>Notar nuevamente que para que este término esté presente deben satisfacerse varias condiciones: LMC y conservación de momento. Bajo estas hipótesis, el  $T_{(\Lambda_s, (\Lambda_s - \alpha_l))}^{\alpha_l}$  puede ser igual, a menos de la fase del cociclo, a  $C \cdot \alpha_l$  (segundo término de la primera fila de (6.1.9)) o simplemente la fase (segunda fila de (6.1.9)) donde el grado de libertad quede con la polarización adecuada. Por una cuestión del LMC, no pueden estar presentes simultáneamente ambas contribuciones. De todas maneras, hemos mostrado que de estar presente una de las dos, ésta queda con el coeficiente adecuado.

de SS, a pesar de ser obtenidos fuera de los puntos de aumentos, seguían aún satisfaciendo un álgebra. En esta Sección discutiremos una posible simetría presente en la acción interpoladora del Capítulo anterior. Cabe resaltar que tal simetría aún no ha sido encontrada, es motivo de investigación actual.

Para la motivación de su posible construcción conviene tener presente el ejemplo del Apéndice D.4, el cual sirve como modelo de juguete al ser muy parecido al tipo de cosas que aparecen en el Lagrangiano interpolador al desarrollar éste en modos. Cuando se mira el Lagrangiano compactificado de D.4 es difícil ver una simetría presente, no obstante vista en altas dimensiones resulta ser muy sencilla. Una idea posible para encontrar tal simetría en nuestro caso podría ser encontrando un “uplift” del mismo a  $D = 10$ . Tal cosa no fue encontrada hasta el momento, quizás debido a que la cuerda presenta algo diferente al resto de las compactificaciones: La LMC. Esta impide que ciertos estados existan en altas dimensiones. La otra posibilidad es encontrar alguna expresión parecida a (D.4.3) para nuestros campos en el Lagrangiano interpolador. Esta última es la que presentaremos.

Notar que (D.4.3) mezcla infinitos grados de libertad. En cuerdas existe algo parecido en la construcción de la Teoría de Campos de Cuerdas (SFT), donde el campo de la cuerda, usualmente llamado  $\Phi$ , presenta una transformación de “gauge”. Siendo  $\Phi$  básicamente los vértices de la cuerda, tal transformación luce similar a (D.4.3), al mezclar distintos modos del campo  $\Phi$  (es decir, estados de la cuerda) entre si, solo que de una manera increíblemente más compleja. La transformación propuesta para nuestro Lagrangiano será similar, donde en lugar de  $\Phi$  serán utilizados los campos generalizados tipo Cartan y Cargados presentados anteriormente<sup>16</sup>.

Una de las cosas que pueden utilizarse como guía para construir la transformación es que la misma debe reducirse para ciertos valores de los parámetros a la transformación de gauge del punto del espacio de módulos en cuestión. Es decir, si la transformación depende de parámetros  $\alpha = \alpha(x, \mathbb{Y})$  y  $\alpha_{\mathcal{I}} = \alpha_{\mathcal{I}}(x, \mathbb{Y})$  (tipo Cargado y Cartan respectivamente) debería ocurrir que cuando se eligen no-nulos ciertos modos de los mismos (llamemosle modos “no-masivos”) los campos de la teoría transformen según la simetría de gauge que corresponda al punto del espacio de módulos. Esto es exactamente lo que sucede en el modelo de juguete de D.4.

Además hay que tener presente que nuestra construcción tiene una limitación: el número de grados de libertad. A diferencia de SFT no contamos con todos los grados de libertad de la cuerda, y por eso es esperable que la transformación propuesta cierre a menos de términos que involucren estados con *más número de osciladores*. Como hemos probado en la Sección anterior, no todas las irrep masivas están completas, solo aquellas que tienen estados de la cuerda con hasta un oscilador. Es por lo tanto razonable esperar, que nuestra propuesta de simetría deje invariante la acción a menos de términos que serían cancelados por contribuciones provenientes de campos con más osciladores de ser agregados estos a la acción.

A continuación, en las siguientes subsecciones presentamos una propuesta para la simetría

---

<sup>16</sup>Después de todo, estos campos no son muy diferentes del campos de la cuerda, de hecho fueron contruidos a partir de los operadores de vértices presentes en la teoría, igual que  $\Phi$ .

en cuestión.

### 6.5.1. Sector de Vectores

Empecemos por aclarar que tanto en este Capítulo como en el anterior fueron analizados los aumentos de simetría teniendo en cuenta el sector de escalares y vectores del Lagrangiano. Es decir, nunca fue tenido en cuenta el sector masivo de gravitones, dilaton y Kalb-Ramon. Sin embargo, si uno quiere tener en cuenta las transformaciones de DFT es necesario que cierta combinación entre el  $F_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}$  y el Kalb-Ramon  $b_{\mu\nu}$  esté presente para que todo resulte covariante. Más precisamente la combinación, usualmente llamada  $D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}$ , resulta ser

$$D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} = F_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} + \partial^{\mathcal{I}} b_{\mu\nu} \quad (6.5.1)$$

donde vemos que involucra necesariamente modos masivos del Kalb-Ramon, usualmente denotandolo  $B_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} = \partial^{\mathcal{I}} b_{\mu\nu}$ . Por lo tanto podríamos pensar que en cada lugar donde fue escrito  $F_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}$  podemos escribir  $B_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}$ .

Miremos de nuevo los términos para los tensores de campos de los vectores tipo Cartan y Cargados presentados anteriormente<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu} A_{\nu]} + iA_{\mu} \star A_{\nu} + iA_{\mu}^{\mathcal{I}} \star A_{\nu}^{\mathcal{I}} + A_{[\mu}^{\mathcal{I}} \star \partial_{\mathcal{I}} A_{\nu]} \\ D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} &= 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^{\mathcal{I}} + \partial^{\mathcal{I}} A_{\mu} \star A_{\nu} + 2A_{[\mu}^{\mathcal{K}} \star \partial_{\mathcal{K}} A_{\nu]}^{\mathcal{I}} + 2i\left(A_{[\mu} \star A_{\nu]}^{\mathcal{I}} + \partial_{\mathcal{K}} A_{[\mu} \star \partial^{\mathcal{I}} A_{\nu]}^{\mathcal{K}}\right) + B_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

Definamos una notación útil, vamos a dividir todo en dos partes de aquí en más: una que llamaremos DFT y otra con un índice c (cargados). Siendo

$$D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} = F_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} + B_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} \quad (6.5.3)$$

definimos  $F^{\mathcal{I}} = F_{DFT}^{\mathcal{I}} + F_c^{\mathcal{I}}$ , donde  $F_{DFT}^{\mathcal{I}}$  contiene todos los términos que no involucren cargados y  $F_c^{\mathcal{I}}$  contiene todos los términos que involucren al menos un cargado. Idem con  $D^{\mathcal{I}} = D_{DFT}^{\mathcal{I}} + D_c^{\mathcal{I}}$ .

Analicemos como transformarían los términos en el Lagrangiano que involucran cinética de vectores. Empecemos por

$$\mathcal{L} \supseteq \mathcal{H}_{\mathcal{IJ}} D^{\mathcal{I}} D^{\mathcal{J}} = \mathcal{H}_{\mathcal{IJ}} D_{DFT}^{\mathcal{I}} D_{DFT}^{\mathcal{J}} + 2\mathcal{H}_{\mathcal{IJ}} D_{DFT}^{\mathcal{I}} D_c^{\mathcal{J}} \quad (6.5.4)$$

donde hemos eliminado la contribución  $\mathcal{H}_{\mathcal{IJ}} D_c^{\mathcal{I}} D_c^{\mathcal{J}}$  pues contribuye a orden cuártico en los campos.

Veamos ahora las transformaciones de gauge sobre los campos

$$\delta\Psi = \delta_{DFT}\Psi + \delta_c\Psi \quad (6.5.5)$$

<sup>17</sup>Hemos agregado ahora al  $F_{\mu\nu}$  un término  $A_{\mu}^{\mathcal{I}} \star A_{\nu}^{\mathcal{I}}$ , que no contribuye al sector no-masivo, pero parece ser necesario por las transformaciones que propondremos.

donde  $\delta_{DFT}$  son las transformaciones presentes ya en DFT y  $\delta_c$  aquellos términos en la transformación del campo correspondiente que involucren campos o parámetros de gauge cargados,  $\Psi$  es cualquiera de los campos que estamos considerando. Por lo tanto, aplicando esto al Lagrangiano queda

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta(\mathcal{H}D_{DFT}D_{DFT} + 2\mathcal{H}D_{DFT}D_c) \\ &= \delta\mathcal{H}D_{DFT}D_{DFT} + 2\mathcal{H}\delta_{DFT}D_{DFT}D_{DFT} \\ &\quad + 2\mathcal{H}\delta_cD_{DFT}D_{DFT} + 2\mathcal{H}(\delta_{DFT}D_{DFT})D_c + 2\mathcal{H}D_{DFT}\delta D_c\end{aligned}\tag{6.5.6}$$

Varias cosas deben ser tenidas en cuenta para seguir. Primero, al orden considerado  $\delta\mathcal{H} = \delta_{DFT}\mathcal{H}$ , pues las transformaciones del escalar que involucren cargados serán al menos de orden 2 en los campos, dando lugar a términos cuárticos. Por lo tanto los primeros 2 términos en la expresión anterior se cancelan exactamente (es lo que ocurre en DFT), i.e.

$$\delta\mathcal{H}D_{DFT}D_{DFT} + 2\mathcal{H}\delta_{DFT}D_{DFT}D_{DFT} = 0\tag{6.5.7}$$

Segundo,  $D_c$  ya es de orden cuadrático en los campos, por lo que en el término  $\mathcal{H}(\delta_{DFT}D_{DFT})D_c$  el  $D_{DFT}$  debe interpretarse a orden mas bajo en los campos, i.e orden 1. Por lo tanto,  $(\delta_{DFT}D_{DFT})$  también debe ser de orden 1, por lo tanto da  $(\delta_{DFT}D_{DFT}) = 0$  (a ese orden, la transformación es solo la parte  $U(1)$  inhomogenea que por antisimetría de índices se anula). Finalmente, por el mismo argumento del orden en los campos, debemos tomar  $\mathcal{H} = \bar{\mathcal{H}}$ , quedando así

$$\delta\mathcal{L} = 2\bar{\mathcal{H}}D_{DFT}(\delta_cD_{DFT} + \delta D_c)\tag{6.5.8}$$

Ahora veamos explícitamente quién es cada término en la transformación del Lagrangiano. A orden más bajo<sup>18</sup>, la transformación de ambos vectores viene dada por

$$\begin{aligned}\delta A_\mu &= \partial_\mu \alpha \\ \delta A_\mu^\mathcal{I} &= \partial_\mu \alpha^\mathcal{I}\end{aligned}\tag{6.5.9}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}D_{c,\mu\nu}^\mathcal{I} &= 2iA_{[\mu} \star A_{\nu]}^\mathcal{I} + \partial^\mathcal{I}A_\mu \star A_\nu \\ \Rightarrow \delta D_{c,\mu\nu}^\mathcal{I} &= 2i\partial_{[\mu}\alpha \star A_{\nu]}^\mathcal{I} + 2iA_{[\mu} \star \partial_{\nu]}\alpha^\mathcal{I} + \partial^\mathcal{I}\partial_\mu \star A_\nu + \partial^\mathcal{I}A_\mu \star \partial_\nu \alpha\end{aligned}\tag{6.5.10}$$

Proponemos ahora

$$\delta_c A_\mu^\mathcal{I} = \alpha \star \partial^\mathcal{I}A_\mu - i\alpha \star A_\mu^\mathcal{I} + iA_\mu \star \alpha^\mathcal{I}\tag{6.5.11}$$

---

<sup>18</sup>En Teoría de Campos de Cuerdas, puede verse que esta parte de la transformación proviene del término  $Q_{BRST}\Psi$

y por lo tanto resulta ser

$$\begin{aligned}\delta_c D_{DFT}^{\mathcal{I}} &= 2\partial_{[\mu}\alpha \star \partial^{\mathcal{I}}A_{\nu]} + 2\alpha \star \partial^{\mathcal{I}}\partial_{[\mu}A_{\nu]} - 2i\partial_{[\mu}\alpha \star A_{\nu]}^{\mathcal{I}} \\ &\quad - 2i\alpha \star \partial_{[\mu}A_{\nu]}^{\mathcal{I}} + 2iA_{[\nu} \star \partial_{\mu]}\alpha^{\mathcal{I}} + 2i\partial_{[\mu}A_{\nu]} \star \alpha^{\mathcal{I}} \\ &\quad \delta_c B_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}\end{aligned}\quad (6.5.12)$$

Si proponemos  $\delta_c B_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} = -\partial^{\mathcal{I}}(\partial_{\mu}\alpha \star A_{\nu})$  se cancelan todos los términos con derivadas espacio-temporales y queda

$$\delta\mathcal{L} = 2\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{IJ}}D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}(\alpha \star \partial^{\mathcal{I}}F_{\mu\nu} - i\alpha \star 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}^{\mathcal{I}} + iF_{\mu\nu} \star \alpha^{\mathcal{I}})\quad (6.5.13)$$

Si ahora agregamos un término más a la transformación  $\delta_c B$ , a saber

$$\delta_c B_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} = -\partial^{\mathcal{I}}(\partial_{\mu}\alpha \star A_{\nu}) - i\alpha \star B_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}\quad (6.5.14)$$

quedaría

$$\delta\mathcal{L} = 2\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{IJ}}D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}(\alpha \star \partial^{\mathcal{J}}F_{\mu\nu} - i\alpha \star D_{\mu\nu}^{\mathcal{J}} + iF_{\mu\nu} \star \alpha^{\mathcal{J}})\quad (6.5.15)$$

es decir, se rearma el campo  $D$ , lo que permite argumentar que el termino  $-2i\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{IJ}}D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} \star \alpha \star D_{\mu\nu}^{\mathcal{J}} = 0$  por propiedades del producto. Finalmente queda

$$\delta\mathcal{L} = 2\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{IJ}}D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}(\alpha \star \partial^{\mathcal{J}}F_{\mu\nu} + iF_{\mu\nu} \star \alpha^{\mathcal{J}})\quad (6.5.16)$$

Luego, esto debe ser cancelado por contribuciones que provengan del Lagrangiano que involucre términos cinéticos de vectores cargados y su interacción con escalares, i.e.

$$\delta\mathcal{L} = \delta\left(F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} + 2M_{\mathcal{I}} \star D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} \star F_{\mu\nu}\right)\quad (6.5.17)$$

siendo

$$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} + 2A_{[\mu}^K \star \partial_K A_{\nu]} + iA_{\mu} \star A_{\nu} + iA_{\mu}^{\mathcal{I}} \star A_{\nu}^{\mathcal{J}} H_{\mathcal{IJ}}\quad (6.5.18)$$

proponemos como transformación de gauge completa de este vector la siguiente expresión.

$$\delta A_{\mu} = \partial_{\mu}\alpha - i\alpha \star A_{\mu} - \alpha^{\mathcal{I}} \star \partial_{\mathcal{I}}A_{\mu} + A^{\mathcal{I}} \star \partial_{\mathcal{I}}\alpha - \alpha^{\mathcal{I}} \star A^{\mathcal{J}} H_{\mathcal{IJ}}\quad (6.5.19)$$

Luego queda

$$\delta(F \star F) = -2i\alpha \star F \star F - 2i\alpha^{\mathcal{I}} \star \partial_{\mathcal{I}}F \star F + 2F^{\mathcal{I}} \partial_{\mathcal{I}}\alpha \star F - 2i\alpha^{\mathcal{I}} \star F^{\mathcal{J}} \star F \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{IJ}}\quad (6.5.20)$$

Los primeros dos términos se anulan por propiedades del producto e integrando por partes al imponer  $\partial_{\mathcal{I}}\alpha^{\mathcal{I}} = 0$ . Queda entonces

$$\delta(F \star F) = 2F^{\mathcal{I}} \partial_{\mathcal{I}}\alpha \star F - 2i\alpha^{\mathcal{I}} \star F^{\mathcal{J}} \star F \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{IJ}}\quad (6.5.21)$$

Notar que no se rearma el  $D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}$ , sin embargo en el primer término podríamos completarlo

pues la diferencia es un término con más de dos derivadas internas y una externa (mayor orden en  $\alpha'$ ). Por lo tanto quedaría

$$\delta(F \star F) = 2D^{\mathcal{I}}\partial_{\mathcal{I}}\alpha \star F - 2i\alpha^{\mathcal{I}} \star F^{\mathcal{J}} \star F\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{IJ}} \quad (6.5.22)$$

El término que falta analizar es  $2M_{\mathcal{I}} \star D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} \star F_{\mu\nu}$ . Al variarlo, la única contribución al orden estudiado viene de variar el escalar, el cual podríamos leer de la Teoría de Campos de Cuerdas y resulta ser

$$\delta M_{\mathcal{I}} = (\mathcal{H}^{\mathcal{IJ}} - \eta^{\mathcal{IJ}})\partial_{\mathcal{J}}\alpha \quad (6.5.23)$$

es decir, solo la parte Right y se cancelarían todos los términos, excepto por  $\alpha^{\mathcal{I}} \star F^{\mathcal{J}} \star F\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{IJ}}$ . Es decir,

$$\delta\left(H_{\mathcal{IJ}} \star D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}} \star D^{\mathcal{J},\mu\nu} + F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu} + M_{\mathcal{I}} \star F^{\mu\nu} \star D_{\mu\nu}^{\mathcal{I}}\right) = -2i\alpha^{\mathcal{I}} \star F^{\mathcal{J}} \star F\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{IJ}} \quad (6.5.24)$$

lo cual, a pesar de no resultar invariante, resulta sorprendente notar el gran número de términos que fueron cancelados y además la manera en la que las cancelaciones ocurren: la contribución de los escalares es importante como en el modelo de juguete del Apéndice.

Hasta la fecha no queda claro si el término sobrante debe cancelarse con transformaciones de estados de spin superior no incluidas en la construcción original del Lagrangiano interpolador. Si se consideraran solo los modos triviales del parámetro  $\alpha^{\mathcal{I}}$  tal término se autocancelaría por clausura de momentos dobles al transformar Fourier.

Por otro lado, aún no han sido consideradas las transformaciones completas de los escalares que contribuirían en las derivadas “covariantes” de los mismos. Queda para futuras investigaciones seguir con esta línea.



# Capítulo 7

## Conclusiones

A continuación se resumen los resultados obtenidos en el desarrollo de la Tesis.

- Al relajar la SC a la LMC se ha podido incluir estados con winding y momento de KK simultáneamente en DFT. En particular en compactificaciones toroidales tipo Kaluza-Klein al desarrollar en modos de Fourier generalizados usando la LMC el Lagrangiano considerado sigue siendo invariante ante los difeomorfismos generalizados. La acción reproduce las amplitudes de scattering de Teoría de Cuerdas al utilizar los difeomorfismos generalizados para aislar los grados de libertad físicos (los cuales se corresponden uno a uno con los de la cuerda). Además contiene una truncación de estados masivos, ya que contiene no solo al sector de SUGRA usual sino también su torre de Kaluza Klein generalizada.
- Se logró describir el fenómeno de aumento y ruptura de simetría en la cuerda Bosónica, realizando una compactificación toroidal del tipo Scherk-Schwarz en DFT. Al relajar la SC los flujos obtenidos dependen explícitamente de los módulos y al ajustar los valores de los mismos a los correspondientes a un punto de aumento de simetría transforman a los flujos en las constantes de estructura del grupo en cuestión que se quiere describir. Al variar ligeramente los valores de los módulos el grupo de simetría se rompe dando lugar a un mecanismo de Higgs cuerdoso, donde ciertos estados (vectores y escalares) se vuelven masivos con masas proporcionales a estos. El Lagrangiano así obtenido reproduce todas las amplitudes de scattering de cuerdas (a orden cúbico) entre estados contenidos en ella, y más aún, resulta ser una descripción fenomenológica pues para valores no muy alejados del punto de aumento de simetría en el espacio de módulos los estados son lo suficientemente livianos como para ser tenidos en cuenta en el sector de bajas energías de la cuerda.
- Un análisis similar al anterior fue realizado para la cuerda Heterótica, logrando incluirse también al sector fermiónico.
- Se logró encontrar una teoría de campos efectiva para la cuerda Heterótica (sector bosónico) compactificada toroidalmente, dependiente de los módulos, que incluye todos

los posibles puntos de aumentos de simetría en una dada compactificación. Para lograr esto se debió tener en cuenta nuevos campos, con LMC diferente a la usual considerada en DFT. Los campos considerados dependen de las coordenadas dobles internas de DFT y su expansión en modos codifica los estados de la cuerda (de esta manera nuevamente la SC es evitada).

- En el contexto del Lagrangiano interpolador, una no-conmutatividad en el espacio doble fue necesaria para poder reproducir todos los puntos de aumento de simetría en una dada compactificación y las amplitudes de scattering the cuerdas. Tal no-conmutatividad tiene su correlato en Teoría de Cuerdas al ser una interpretación geométrica para los cociclos (no tenida en cuenta hasta ahora).
- Además se logró mostrar que el Lagrangiano interpolador puede armar irreps masivas correctamente siempre que estas contengan estados de cuerdas que fueron incluidos en el desarrollo en modos Kaluza Klein generalizados de los campos involucrados. En particular se logró clasificar cuales representaciones masivas pueden ser reproducidas. Nuevamente la no-conmutatividad fue importante para conseguir esto, ya que sin este no se logran armar los acoplamientos necesarios que dan lugar a las derivadas covariantes de las irreps masivas.
- Se mostró evidencia de una posible simetría “oculta” para el Lagrangiano interpolador.

Finalmente, como posible líneas futuras que pueden desprenderse de este trabajo pueden mencionarse: La búsqueda de una simetría para el Lagrangiano interpolador, posiblemente relacionada con Teoría de Campos de Cuerdas; la posible aplicación en encontrar soluciones cosmológicas desde el punto de vista de DFT, en particular que ayuden a entender la transición entre la fase de windings y nuestra fase actual; en el contexto de Cosmología de Gas de Cuerdas puede resultar útil entender los procesos de aumento de simetría desde DFT. Con respecto a encontrar una simetría para el Lagrangiano interpolador un posible camino para explorar es utilizar técnicas de  $L_\infty$  para encontrar una expresión, de ser posible, para la misma. Dada la relación entre GDFT (Gauge Double Field Theory) y los aumentos de simetría [50] se ha realizado un avance en estos últimos meses al mostrar la inclusión de GDFT en la estructura de  $L_\infty$ . Dicho trabajo ha sido publicado en la revista JHEP bajo el nombre “*Gauged Double Field Theory as an  $L_\infty$  algebra*”.

# Apéndice A

## Sobre el Capítulo 2

### A.1. Términos Extra en la Acción de DFT

La formulación original de DFT de Siegel [10, 16] contiene términos extra que no están contenidos en (1.4.13). A menos de una derivada total, éstos pueden expresarse como [14]

$$\Delta S = \int d^{2D} X e^{-2d} \left[ \frac{1}{2} (S_{\bar{A}\bar{B}} - \eta_{\bar{A}\bar{B}}) \eta^{PQ} \partial_M E^{\bar{A}}{}_P \partial^M E^{\bar{B}}{}_Q + 4 \partial_M d \partial^M d - 4 \partial_M \partial^M d \right]. \quad (\text{A.1.1})$$

Mostraremos aquí, que estos términos se anulan cuando la LMC (1.4.17) se impone.

Para mostrar que el término proporcional a  $S_{\bar{A}\bar{B}}$  se anula, consideremos la siguiente integral

$$I_1 = \int d^{2D} X \partial^M \partial_M \left( e^{-2d} \eta^{PQ} \mathcal{H}_{PQ} \right) = \int d^{2D} X \partial^M \partial_M \left( e^{-2d} \eta^{PQ} S_{\bar{A}\bar{B}} E^{\bar{A}}{}_P E^{\bar{B}}{}_Q \right) = 0. \quad (\text{A.1.2})$$

Con un poco de álgebra y haciendo uso de la propiedad  $\mathcal{H}_{PQ} \eta^{PQ} = 0$ , se ve que

$$I_1 = 2 \int d^{2D} X e^{-2d} \eta^{PQ} S_{\bar{A}\bar{B}} \left( \partial_M E^{\bar{A}}{}_P \partial^M E^{\bar{B}}{}_Q + E^{\bar{A}}{}_P \partial_M \partial^M E^{\bar{B}}{}_Q \right). \quad (\text{A.1.3})$$

De manera similar, para el término en (A.1.1) proporcional a  $\eta_{\bar{A}\bar{B}}$  consideremos la integral

$$I_2 = \int d^{2D} X \partial^M \partial_M \left( e^{-2d} \eta^{PQ} \eta_{\bar{A}\bar{B}} \right) = \int d^{2D} X \partial^M \partial_M \left( e^{-2d} \eta^{PQ} \eta_{\bar{A}\bar{B}} E^{\bar{A}}{}_P E^{\bar{B}}{}_Q \right) = 0, \quad (\text{A.1.4})$$

el cual puede ser reexpresado como

$$I_2 = 2 \int d^{2D} X e^{-2d} \eta^{PQ} \left( -\eta_{PQ} \partial_M \partial^M d + \eta_{\bar{A}\bar{B}} \partial_M E^{\bar{A}}{}_P \partial^M E^{\bar{B}}{}_Q + \eta_{\bar{A}\bar{B}} E^{\bar{A}}{}_P \partial_M \partial^M E^{\bar{B}}{}_Q \right). \quad (\text{A.1.5})$$

Finalmente, para el término proporcional a  $\partial_M d \partial^M d$ , consideremos la integral

$$I_3 = \int d^{2D} X \partial^M \partial_M e^{-2d} = 2 \int d^{2D} X e^{-2d} (2 \partial_M d \partial^M d - \partial_M \partial^M d) = 0. \quad (\text{A.1.6})$$

De  $I_1$ ,  $I_2$  y  $I_3$ , podemos expresar  $\Delta S$  como

$$\Delta S = \int d^{2D}X e^{-2d} \left[ -\frac{1}{2}(S_{\bar{A}\bar{B}} - \eta_{\bar{A}\bar{B}})\eta^{PQ} E^{\bar{A}}{}_P \partial_M \partial^M E^{\bar{B}}{}_Q - (2+D)\partial_M \partial^M d \right]. \quad (\text{A.1.7})$$

Y por lo tanto, al transformar al espacio de momentos e imponiendo la LMC (1.4.17), obtenemos  $\Delta S = 0$ .

## A.2. Cálculos en Cuerdas

Aquí se presentan los resultados de amplitudes de 3-puntos en la cuerda bosónica para el caso de una dimensión compactificada a un círculo de radio  $R$ . Fueron calculadas con los operadores de vértice definidos en (2.5.1). Organizamos los resultados de amplitudes mostrando primero aquellos que involucren solo estados no-masivos y luego aquellos que contienen al menos un masivo. Usamos la notación  $h, b, \phi, A, \tilde{A}$  para referirnos al gravitón, tensor antisimétrico, escalar and vectores, respectivamente. Recordar que ningún vector ni escalar masivos aparecen en la compactificación sobre el círculo, y los estados masivos son los modos de  $h$  y  $b$ . Los puntos indican contracción con la métrica de Minkowski en espacio-tiempo  $\eta_{\mu\nu}$ .

### Amplitudes de 3-puntos de estados no-masivos

$$\begin{aligned} \langle \Phi \Phi h \rangle &= -(\pi g_c) \frac{1}{2} \Phi \Phi (k_1 \cdot \epsilon^h \cdot k_2) \\ \langle h h h \rangle &= -(\pi g_c) \frac{1}{2} ((k_2 \cdot \epsilon_1^h \cdot \epsilon_3^h \cdot \epsilon_2^h \cdot k_3) + (k_3 \cdot \epsilon_1^h \cdot \epsilon_2^h \cdot \epsilon_3^h \cdot k_2) + (k_3 \cdot \epsilon_2^h \cdot \epsilon_1^h \cdot \epsilon_3^h \cdot k_1)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (k_3 \cdot \epsilon_1^h \cdot k_2) \text{Tr}(\epsilon_2^h \epsilon_3^h) - \frac{1}{2} (k_3 \cdot \epsilon_2^h \cdot k_1) \text{Tr}(\epsilon_1^h \epsilon_3^h) - \frac{1}{2} (k_1 \cdot \epsilon_3 \cdot k_2) \text{Tr}(\epsilon_1^h \epsilon_2^h)) \\ \langle A A \Phi \rangle &= (\pi g_c) \Phi(k_2 \cdot \epsilon_1)(k_1 \cdot \epsilon_2) \\ \langle \tilde{A} \tilde{A} \Phi \rangle &= -(\pi g_c) \Phi(k_2 \cdot \epsilon_1)(k_1 \cdot \epsilon_2) \\ \langle A A h \rangle &= (\pi g_c) \left( (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(k_1 \cdot \epsilon^h \cdot k_1) + (k_1 \cdot \epsilon^h \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot k_2) + (k_2 \cdot \epsilon^h \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot k_1) \right) \\ \langle A \tilde{A} b \rangle &= (\pi g_c) \left( (k_1 \cdot \epsilon^b \cdot \epsilon_2)(\epsilon_1 \cdot k_2) + (k_2 \cdot \epsilon^b \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot k_1) \right) \\ \langle b b h \rangle &= (\pi g_c) \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \text{Tr}(\epsilon_1^b \cdot \epsilon_2^b)(k_1 \cdot \epsilon_3^h \cdot k_2) + (k_1 \cdot \epsilon_2^b \cdot \epsilon_1^b \cdot \epsilon_3^h \cdot k_1) + (k_2 \cdot \epsilon_1^b \cdot \epsilon_3^h \cdot \epsilon_2^b \cdot k_3) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

### Amplitudes de 3-puntos con al menos un estado masivo

$$\begin{aligned}
\langle hhA \rangle &= (\pi g_c) \frac{p_1}{R} \left( (k_1 \cdot \epsilon_3) \text{Tr}(\epsilon_1^h \cdot \epsilon_2^h) + (\epsilon_3 \cdot \epsilon_2^h \cdot \epsilon_1^h \cdot k_2) - (\epsilon_3 \cdot \epsilon_1^h \cdot \epsilon_2^h \cdot k_1) \right) \\
\langle hh\tilde{A} \rangle &= (\pi g_c) \frac{\tilde{p}_1}{R} \left( (k_1 \cdot \epsilon_3) \text{Tr}(\epsilon_1^h \cdot \epsilon_2^h) + (\epsilon_3 \cdot \epsilon_2^h \cdot \epsilon_1^h \cdot k_2) - (\epsilon_3 \cdot \epsilon_1^h \cdot \epsilon_2^h \cdot k_1) \right) \\
\langle hh\Phi \rangle &= (\pi g_c) \frac{1}{2} \Phi \text{Tr}(\epsilon_1^h \cdot \epsilon_2^h) k_{1L} k_{1R} \\
\langle bb\Phi \rangle &= -(\pi g_c) \frac{1}{2} \Phi \text{Tr}(\epsilon_1^b \cdot \epsilon_2^b) k_{1L} k_{1R} \\
\langle bbA \rangle &= -(\pi g_c) \frac{p_1}{R} \left( (\epsilon_3 \cdot k_1) \text{Tr}(\epsilon_1^b \cdot \epsilon_2^b) + (k_2 \cdot \epsilon_1^b \cdot \epsilon_2^b \cdot \epsilon_3) - (k_1 \cdot \epsilon_2^b \cdot \epsilon_1^b \cdot \epsilon_3) \right) \\
\langle bb\tilde{A} \rangle &= -(\pi g_c) \frac{\tilde{p}_1}{R} \left( (\epsilon_3 \cdot k_1) \text{Tr}(\epsilon_1^b \cdot \epsilon_2^b) + (k_2 \cdot \epsilon_1^b \cdot \epsilon_2^b \cdot \epsilon_3) - (k_1 \cdot \epsilon_2^b \cdot \epsilon_1^b \cdot \epsilon_3) \right) \\
\langle hbA \rangle &= (\pi g_c) \left( \frac{p_1}{R} (k_2 \cdot \epsilon_1^h \cdot \epsilon_2^b \cdot \epsilon_3) + \frac{p_2}{R} (\epsilon_3 \cdot \epsilon_1^h \cdot \epsilon_2^b \cdot k_1) \right) \\
\langle hb\tilde{A} \rangle &= (\pi g_c) \left( \frac{\tilde{p}_1}{R} (k_2 \cdot \epsilon_1^h \cdot \epsilon_2^b \cdot \epsilon_3) + \frac{\tilde{p}_2}{R} (\epsilon_3 \cdot \epsilon_1^h \cdot \epsilon_2^b \cdot k_1) \right)
\end{aligned} \tag{A.2.2}$$

donde  $k_L = \frac{p}{R} + \frac{\tilde{p}}{R}$  and  $k_R = \frac{p}{R} - \frac{\tilde{p}}{R}$ .

#### A.2.1. Álgebra de difeomorfismos

Siguiendo la discusión en [5, 19], podemos asociar un parámetro algebraico global a los infinitos modos  $\xi^{\mathcal{P}(\mathbb{M})}(x)$  de la expansión GKK de los parámetros locales de la transformación local, de la misma manera que el álgebra global de Poincaré está asociada a una transformación general de coordenadas. De

$$\xi^{\mathcal{P}}(x, \mathbb{Y}) = \sum_{\mathbb{M}}' \xi^{\mathcal{P}(\mathbb{M})}(x) e^{i\mathbb{M} \cdot \mathbb{Y}}, \tag{A.2.3}$$

con  $\mathcal{P} = (\rho, L)$ , siendo  $\rho$  índice del espacio-tiempo y  $L$  índice del espacio interno doble, nos restringimos a

$$\xi^{\rho(\mathbb{M})}(x) = a^{\rho(\mathbb{M})} + \omega^{(\mathbb{M})}{}_{\nu} x^{\nu}, \tag{A.2.4}$$

$$\xi^{L(\mathbb{M})}(x) = C^{L(\mathbb{M})}, \tag{A.2.5}$$

donde  $a^{\rho(\mathbb{M})}, \omega^{(\mathbb{M})}{}_{\nu}, C^{L(\mathbb{M})}$  son constantes. Los correspondientes generadores son

$$\hat{P}_{\rho}^{(\mathbb{M})} = i e^{i\mathbb{M} \cdot \mathbb{Y}} \partial_{\rho}, \tag{A.2.6}$$

$$\hat{M}_{\mu\nu}^{(\mathbb{M})} = e^{i\mathbb{M} \cdot \mathbb{Y}} (x_{\mu} \partial_{\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu}), \tag{A.2.7}$$

$$\hat{Q}_L^{(\mathbb{M})} = i e^{i\mathbb{M} \cdot \mathbb{Y}} \partial_L. \tag{A.2.8}$$

Es fácil chequear que estos operadores generan un álgebra que se corresponde con una

generalización directa del álgebra encontrada en [19]. En efecto,

$$\begin{aligned}
[\hat{M}_{\mu\nu}^{(\mathbb{M})}, \hat{M}_{\rho\sigma}^{(\mathbb{N})}] &= i[\eta_{\nu\rho}\hat{M}_{\mu\sigma}^{(\mathbb{M}+\mathbb{N})} + \eta_{\mu\sigma}\hat{M}_{\nu\rho}^{(\mathbb{M}+\mathbb{N})} - \eta_{\mu\rho}\hat{M}_{\nu\sigma}^{(\mathbb{M}+\mathbb{N})} - \eta_{\nu\sigma}\hat{M}_{\mu\rho}^{(\mathbb{M}+\mathbb{N})}] \\
[\hat{M}_{\mu\nu}^{(\mathbb{M})}, P_{\lambda}^{(\mathbb{N})}] &= i[\eta_{\lambda\nu}P_{\mu}^{(\mathbb{M}+\mathbb{N})} - \eta_{\lambda\mu}P_{\nu}^{(\mathbb{M}+\mathbb{N})}] \\
[P_{\rho}^{(\mathbb{M})}, P_{\mu}^{(\mathbb{N})}] &= 0 \\
[Q_L^{(\mathbb{M})}, \hat{M}_{\mu\nu}^{(\mathbb{N})}] &= -\mathbb{N}_L M_{\mu\nu}^{(\mathbb{M}+\mathbb{N})} \\
[Q_L^{(\mathbb{M})}, P_{\mu}^{(\mathbb{N})}] &= -\mathbb{N}_L P_{\mu}^{(\mathbb{M}+\mathbb{N})} \\
[Q_L^{(\mathbb{M})}, Q_S^{(\mathbb{N})}] &= -\mathbb{N}_L Q_S^{(\mathbb{M}+\mathbb{N})} + \mathbb{M}_S Q_L^{(\mathbb{M}+\mathbb{N})}
\end{aligned} \tag{A.2.9}$$

Vemos que los modos cero dan lugar al álgebra de Poincaré  $d$  dimensional. También, de la última ecuación notamos que, para  $L = S$

$$[Q_L^{(\mathbb{M})}, Q_L^{(\mathbb{N})}] = (\mathbb{M}_L - \mathbb{N}_L) Q_L^{(\mathbb{M}+\mathbb{N})}, \tag{A.2.10}$$

la cual es un álgebra de Virasoro (sin carga central) para cada uno de los valores  $L = 1, \dots, 2n$ .

Para el caso del círculo tendríamos  $\mathbb{M} = (m_1, m_2) = (m, \tilde{m})$  con  $m = 0$  o  $\tilde{m} = 0$  debido a la LMC.

Notar que si elegimos  $\mathbb{M} = (m, 0)$  y  $\mathbb{N} = (n, 0)$  con  $m, n = \pm 1, 0$ , luego  $\hat{Q}_1^{(\mathbb{M})} \equiv \hat{Q}_1^{(\pm 1)}, Q_1^{(0)}$  y  $\hat{P}_{\mu}^{(0)}, \hat{M}_{\mu\nu}^{(0)}, \hat{Q}_2^{(0)}$  cierran un álgebra Poincaré  $\otimes SO(1, 2)$ . De la misma manera, intercambiar  $1 \leftrightarrow 2$ , es decir, windings con momento, se obtiene otra álgebra  $SO(1, 2)$ . Por lo tanto, el álgebra de Poincaré original se aumenta a Poincaré  $\otimes SO(1, 2)^2$ . Se mostró en [20] que, en el caso del círculo en teorías de campos, los estados masivos de KK se organizan en un representación de dimensión infinita (no-unitaria)  $R$  de  $SO(1, 2)$ . En DFT sobre el círculo, los windings y momentos están desacoplados, y entonces los estados masivos con momento KK llenarán una representación de dimensión infinita de la primer álgebra mientras que aquellos con windings se organizaran en una similar de la segunda, es decir  $(R, 1) + (1, R)$ .

En el caso genérico podemos proceder de un modo similar eligiendo los momentos GKK momenta at the position  $L$ ,  $\mathbb{M}_L = 0, \pm 1$  with all other components vanishing. In this case we would have Poincaré  $\otimes SO(1, 2)^{2n}$ . Since massive states with  $M^2 = \mathbb{P} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbb{P}$  mix windings and momenta the analysis of representations is more involved and we will not perform it in the present work.

Incluso si el álgebra de arriba fuese una simetría del Lagrangiano original, estaría rota a  $U(1)^n \times U(1)^n$  por el vacío (2.4.39). Esto se puede chequear insertando la expansión en modos (A.2.3 para calcular la transformación de los campos  $g_{\mu\nu}, A_{\mu}^M, b_{\mu\nu}, \mathcal{H}_{MN}$  y pidiendo que el vacío (2.4.39) resulte invariante bajo estas transformaciones. Los  $\xi^{\mathcal{P}(\mathbb{M})}$ , con  $\mathbb{M} \neq 0$  corresponden a generadores rotos asociados a los bosones de Goldstone.

# Apéndice B

## Sobre el Capítulo 3

### B.1. Aumento $SU(2)_L \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_R$

Cuando dos dimensiones son compactificadas a un Toro  $T^2$ , y los valores de los módulos resultan ser

$$G_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.1})$$

y  $B = 0$ , un aumento de simetría a  $(SU(2) \times SU(2))_L \times (SU(2) \times SU(2))_R$  se obtiene para  $\mathbb{P} = (\pm 1, 0, \pm 1, 0), (0, \pm 1, 0, \pm 1), (\pm 1, 0, \mp 1, 0), (0, \pm 1, 0, \mp 1)$ . Presentaremos ahora la construcción de los vielbeins generalizados que reproducen los flujos (4.1.20). La contracción entre momentos y coordenadas internas es

$$k_{(j)L}^m y_{Lm} + k_{(j)R}^m y_{Rm} = k_{(j)L}^1 y_{L1} + k_{(j)L}^2 y_{L2} + k_{(j)R}^1 y_{R1} + k_{(j)R}^2 y_{R2} \quad (\text{B.1.2})$$

Aquí  $(j)$  codifica los valores de  $\mathbb{P} = (p_1, p_2, \tilde{p}^1, \tilde{p}^2)$  que darían el  $SU(2)_j$  sobre el punto autodual. Por ejemplo,  $\mathbb{P} = (\pm 1, 0, \pm 1, 0)$  genera un  $k_{(1)L}^m$  y  $k_{(1)R}^m$  (donde  $k_{(1)R}^m = 0$  sobre el punto autodual), etc. Todos juntos son

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= (\pm 1, 0, \pm 1, 0) \rightarrow k_{(1)L(R)}^m \\ \mathbb{P} &= (0, \pm 1, 0, \pm 1) \rightarrow k_{(2)L(R)}^m \\ \mathbb{P} &= (\pm 1, 0, \mp 1, 0) \rightarrow k_{(3)L(R)}^m \\ \mathbb{P} &= (0, \pm 1, 0, \mp 1) \rightarrow k_{(4)L(R)}^m \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

donde en el correspondiente punto autodual  $k_{(1)R}^m = k_{(2)R}^m = 0$  y  $k_{(3)L}^m = k_{(4)L}^m = 0$ . Siguiendo los pasos explicados en el Capítulo 3 proponemos vielbeins generalizados con 12 dimensiones ( $2\dim G_L = 12$ ) donde la dependencia con las coordenadas es solo en  $\mathbb{Y}^M$ . Una rápida generalización del caso del círculo da lugar a los siguientes vielbeins

$$E_{+(j)} = (0^{3(j-1)}; \mathbf{v}_{+(j)}; 0^{3(4-j)}) e^{-i\theta_j} = E_{-(j)}^* \quad (\text{B.1.4})$$

$$E_{0(j)} = (0^{3(j-1)}; \mathbf{v}_{0(j)}; 0^{3(4-j)}) \quad (\text{B.1.5})$$

donde  $\mathbf{v}_{\pm j} = (0, 1, \pm i)$  ( $\mathbf{v}_{0j} = (i, 0, 0)$ ) es un vector 3 dimensional insertado en la posición  $j$ . Notar que  $E_{+(j+3)} \equiv \bar{E}_{+(j)}$  corresponde a vectores Right. Sobre el punto autodual estos vielbeins dan lugar a  $SU(2)_L^2 \times SU(2)_R^2$ .

Al moverse fuera del punto  $SU(2)^4$  las constantes de estructura adquieren una dependencia en los módulos  $f_{IJK}(g, B)$  ( $I, J, K = 1, \dots, 12$ ). De hecho, debido a la estructura de los (B.1.5), se encienden componentes de los flujos que mezclan el sector Left y Right para un valor fijo de  $(j)$ , es decir, entre aquellos que darían el mismo  $SU(2)_j$ .

Por ejemplo, moviendonos a  $B = 0$  con una métrica genérica, encontramos

$$f_{+-\bar{0}}(1)(G) \propto k_R(1) = \sqrt{2} [G_{11} + \frac{G_{22}}{\det(G)} - 2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1.6})$$

$$f_{+-\bar{0}}(2)(G) \propto k_R(2) = \sqrt{2} [G_{11} + \frac{G_{11}}{\det(G)} - 2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1.7})$$

Al insertar estas constantes en la acción genérica de DFT se puede ver que la simetría es espontaneamente rota a  $U(1)^4$  ( El cálculo completo fue realizado usando un programa de computadora.)

Las masas de los vectores Left resultarían

$$m_1^2 = f_{+-\bar{0}}^2(1)(G) \quad (\text{B.1.8})$$

$$m_2^2 = f_{+-\bar{0}}^2(2)(G) \quad (\text{B.1.9})$$

y similar para los vectores Right, las cuales, por supuesto, coinciden con aquellas computadas desde cuerdas. Los valores  $G_{12} = 0, G_{11} = G_{22} = 1$  dan lugar a  $m_1^2 = m_2^2 = 0$  produciendo así el aumento de simetría a  $SU(2)^4$ .

Además,  $G_{12} = 0, G_{11} = 1, G_{22} = (\frac{R_{(2)}}{\sqrt{\alpha'}})^2$  corresponde a una ruptura parcial a  $SU(2)_{1L} \times U(1)_{2L} \times SU(2)_R \times U(1)_{2R}$  etc.



# Apéndice C

## Sobre el Capítulo 5

### C.1. Resumen básico de la Heterótica

Se resumen aquí algunos aspectos básicos de la cuerda heterótica. Nos concentramos en particular en el caso  $SO(32)$ .

Al compactificarse a  $d$  dimensiones espacio-temporales, los momentos Left y Right se agrupan en un momento

$$\mathbb{L} = (l_L, l_R), \quad (\text{C.1.1})$$

definidos en una red autodual  $\Gamma_{26-d, 10-d}$  de signatura  $(26-d, 10-d)$ . Al escribir  $l_L^I = (L_L^I, p_L^m)$  con  $I = 1, \dots, 16$  y  $m = 1, \dots, 10-d=r$ , el momento dependiente de los módulos se lee

$$\begin{aligned} L_L^I &= P^I + R A_n^I \tilde{p}^n \\ l_L^m &= \frac{\sqrt{\alpha'}}{2} \left[ \frac{\tilde{p}^m}{\tilde{R}} + 2g^{mn} \left( \frac{p_n}{R} - \frac{1}{2} B_{nr} \frac{\tilde{p}^r}{\tilde{R}} \right) - P^I A_I^m - \frac{R}{2} A_I^m A_n^I \tilde{p}^n \right] \\ l_R^m &= \frac{\sqrt{\alpha'}}{2} \left[ -\frac{\tilde{p}^m}{\tilde{R}} + 2g^{mn} \left( \frac{p_n}{R} - \frac{1}{2} B_{nr} \frac{\tilde{p}^r}{\tilde{R}} \right) - P^I A_I^m - \frac{R}{2} A_I^m A_n^I \tilde{p}^n \right], \end{aligned} \quad (\text{C.1.2})$$

donde  $g_{mn}, B_{mn}$  son la métrica y el tensor antisimétrico internos,  $A_m$  son las líneas de Wilson,  $p_n$  y  $\tilde{p}^n$  son los momentos KK y winding enteros respectivamente. Los  $P_I$  son las componentes de los pesos de  $Spin(32)$ .

Al definir el vector  $\check{\mathbb{P}} = (P_I, p_n, \tilde{p}^n)$  y  $\mathbb{L} = (L_L^I, l_L^m, l_R^m)$  podemos escribir

$$\mathbb{L} = \mathcal{R}(\Phi) \check{\mathbb{P}}, \quad (\text{C.1.3})$$

donde

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & RA \\ -\frac{\sqrt{\alpha'}}{2} A & \frac{\sqrt{\alpha'}}{\tilde{R}} g^{-1} & \frac{\sqrt{\alpha'}}{2\tilde{R}} (1 - g^{-1} B - \frac{1}{2} A \cdot A \alpha') \\ -\frac{\sqrt{\alpha'}}{2} A & \frac{\sqrt{\alpha'}}{\tilde{R}} g^{-1} & \frac{\sqrt{\alpha'}}{2\tilde{R}} (1 - g^{-1} B - \frac{1}{2} A \cdot A \alpha') \end{pmatrix} \quad (\text{C.1.4})$$

es quien hace el cambio de base. También rota las coordenadas  $\check{\mathbb{Y}} = (y^I, y_m, \tilde{y}^m)$  to  $\mathbb{Y} =$

$(Y^I, y_L^m, y_R^m)$ . En particular transforma la métrica  $O(16 + r, r)$ , i.e.  $\eta_C$  definida en (5.3.10) a

$$\eta^{\mathcal{IJ}} = \begin{pmatrix} 1_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_r \\ 0 & 1_r & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1.5})$$

Notar que  $\mathcal{R}(\Phi)$  codifica la dependencia con los módulos.

Las fórmulas de masas para los estados de la cuerda son

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'}{2} m_L^2 &= \frac{1}{2} l_L^2 + (N - 1) \\ \frac{\alpha'}{2} m_R^2 &= \frac{1}{2} l_R^2 + \bar{N}, \end{aligned} \quad (\text{C.1.6})$$

donde  $N = N_B, \bar{N} = \bar{N}_B + \bar{N}_F + \bar{E}_0$  y donde  $N_B, \bar{N}_B$  son los números de osciladores Left y Right,  $\bar{N}_F$  es el número de oscilador Right R fermiónico y  $\bar{E}_0 = -\frac{1}{2}(0)$  para el sector NS (R). La condición LMC  $\frac{1}{2}m_L^2 - \frac{1}{2}m_R^2 = 0$  y por lo tanto

$$\frac{1}{2}\mathbb{L}^2 = \tilde{p} \cdot p + \frac{1}{2}P^2 = (1 - N + \bar{N}). \quad (\text{C.1.7})$$

En el Capítulo 5 nos referimos a  $\bar{N}_B = 0, N_F = \frac{1}{2}$ , es decir  $\bar{N} = 0$ . Los llamados vectores “cargados” corresponden a  $N = 0$ , i.e.  $\mathbb{L}^2 = 2$ . En este caso, aquellos que resulten no masivos se corresponden con  $\frac{1}{2}l_L^2 = 1, l_R = 0$ <sup>1</sup>.

Además hay  $10 - d + 16$  bosones Left de gauge correspondientes a los to 16 generadores Cartan  $\partial_z Y^I \tilde{\psi}^\mu$  del algebra de gauge original así como también hay  $10 - d$  bosones de gauge KK provenientes de combinaciones LEft entre la métrica y el tensor antisimétrico  $\partial_z Y^m \tilde{\psi}^\mu$ . Las  $10 - d$  combinaciones Right  $\partial_z X^\mu \tilde{\psi}^m$  con  $m = 1, \dots, 10 - d$  generan el grupo de gauge Abelian Right. Estos estados tienen  $l_R = 0$  y  $l_L = 0$ , con con winding y momento KK nulos.

---

<sup>1</sup>Las normalizaciones se eligen de manera que  $\frac{l_L^m}{\sqrt{\alpha'}}$ , para un punto de aumento de simetría, corresponda a las coordenadas de los vectores peso de la representación en la red producida por las raíces simples  $\alpha_m$  con  $\alpha_m^2 = 2$ .

# Apéndice D

## Sobre el Capítulo 6

### D.1. Construcción de Irreps

Sea un grupo simple  $G$  de rango  $r$  cuya álgebra  $g$  en la base de Cartan-Weyl es

$$[H_I, E_\alpha] = \alpha^I E_\alpha \quad (\text{D.1.1})$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^I H_I \quad (\text{D.1.2})$$

$$[E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}] = \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} E_{\alpha_3} \quad (\text{D.1.3})$$

$$[H_I, H_J] = 0 \quad (\text{D.1.4})$$

donde  $\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \pm 1$  si  $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$  y sino da cero.  $E_\alpha$  es el generador “cargado” asociado a la raíz  $\alpha$ .  $H_I$  con  $I = 1, \dots, r$  son los generadores Cartanes. La raíz  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^r)$  es un vector en  $R^r$ . Por ej, para  $SU(3)$ ,  $r = 2$  y las raíces simples  $\alpha_1, \alpha_2$  tienen componentes  $\alpha_1 = (\sqrt{2}; 0)$ ,  $\alpha_2 = (-1/\sqrt{2}; \sqrt{3/2})$ .

Llamemos  $|\mu\rangle$  al estado correspondiente al peso  $\mu$ , luego

$$H_I |\mu\rangle = \mu_I |\mu\rangle \quad (\text{D.1.5})$$

donde  $\mu_I$  son las componentes de  $|\mu\rangle$  en  $R^r$ . Por ej, para el estado de peso máximo de la  $\mathbf{6}$  de  $SU(3)$  resulta  $\Lambda = \frac{4}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2$ . También este estado puede ser escrito en la base de los pesos fundamentales  $\omega_i$  duales a las raíces, i.e. cumplen  $\omega_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij}$ , quedando  $\Lambda = 2\omega_1 + 0\omega_2$ , por lo que se suele denotar a este estado como el  $(2, 0)$ .

$$\mu = \frac{4}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 = \frac{4}{3}(\sqrt{2}; 0) + \frac{2}{3}(-1/\sqrt{2}; \sqrt{3/2}) = (\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) \quad (\text{D.1.6})$$

#### D.1.1. Construcción de los $T_{ij}^a$

Armaremos las distintas representaciones  $R$  caracterizadas por  $T_{ij}^a$ . Dados los diferentes pesos  $\mu^i$  ( $i = 1, \dots, \dim R$ ) de los estados de en  $R$ , luego para los generadores Cartan tenemos

que

$$(H_I)^{ij} = \langle \mu^i | (H_I) | \mu^j \rangle = \mu_I \delta^{ij} \quad (\text{D.1.7})$$

Para los operadores cargados tenemos que

$$E_{\pm\alpha} |\mu\rangle = N_{\pm\alpha, \mu} |\mu \pm \alpha\rangle \quad (\text{D.1.8})$$

y por lo tanto vemos que para los pesos en una dada representación ocurre que

$$E_{\pm\alpha}^{ij} = \langle \mu^i | E_{\pm\alpha} | \mu^j \rangle = N_{\pm\alpha, \mu^j} \langle \mu^i | \mu^j \pm \alpha \rangle = N_{\pm\alpha, \mu^j} \delta_{\mu^i, \mu^j \pm \alpha} \quad (\text{D.1.9})$$

Como resultado solo coeficientes específicos fuera de la diagonal pueden ser no-nulos. Calculemos  $N_{\pm\alpha, \mu^j}$  para cada  $\alpha$ .

Recordar que de (D.1.8)

$$E_{-\alpha} |\mu\rangle = N_{-\alpha, \mu} |\mu - \alpha\rangle \Rightarrow \langle \mu - \alpha | N_{-\alpha, \mu}^* \quad (\text{D.1.10})$$

y por lo tanto

$$N_{-\alpha, \mu} = \langle \mu - \alpha | E_{-\alpha} | \mu \rangle = \langle \mu - \alpha | E_{\alpha}^{\dagger} | \mu \rangle = \langle \mu | E_{\alpha} | \mu - \alpha \rangle^* = N_{\alpha, \mu - \alpha}^* \quad (\text{D.1.11})$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \langle \mu | [E_{\alpha}, E_{-\alpha}] | \mu \rangle &= \langle \mu | \alpha^I H_I | \mu \rangle = \alpha \cdot \mu \\ &= \langle \mu | E_{\alpha} E_{-\alpha} | \mu \rangle - \langle \mu | E_{-\alpha} E_{\alpha} | \mu \rangle \\ &= |N_{-\alpha, \mu}|^2 - |N_{\alpha, \mu}|^2 \end{aligned} \quad (\text{D.1.12})$$

por lo tanto al usar (D.1.11) se llega a

$$|N_{-\alpha, \mu}|^2 - |N_{\alpha, \mu}|^2 = |N_{\alpha, \mu - \alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu}|^2 = \alpha \cdot \mu \quad (\text{D.1.13})$$

Si escribimos  $\mu \rightarrow \mu + p\alpha$  con  $p$  entero podemos escribir la expresión de arriba como

$$|N_{\alpha, \mu + (p-1)\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu + p\alpha}|^2 = \alpha \cdot (\mu + p\alpha) \quad (\text{D.1.14})$$

En particular si  $p$  es tan que  $E_{\alpha} |\mu + p\alpha\rangle = 0$ , i.e. aniquilado por los operadores de creación, luego para este estado  $N_{\alpha, \mu + p\alpha} = 0$  y

$$|N_{\alpha, \mu + (p-1)\alpha}|^2 = \alpha \cdot (\mu + p\alpha) \quad (\text{D.1.15})$$

de aquí podemos calcular  $N_{\alpha, \mu + (p-1)\alpha}$  y recursivamente los diferentes descendientes. De hecho, asumamos que sistemáticamente aplicamos operadores hasta llegar al estado  $|\mu - q\alpha\rangle$  que cumple que  $E_{-\alpha} |\mu - q\alpha\rangle = 0$ . Entonces  $N_{\alpha, \mu - (p+1)\alpha} = 0$  y aplicando la expresión recursiva

llegamos a

$$\begin{aligned}
0 &= |N_{\alpha, \mu+(p-1)\alpha}|^2 - 0 \\
&+ |N_{\alpha, \mu+(p-2)\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu+(p-1)\alpha}|^2 \\
&+ |N_{\alpha, \mu+(p-3)\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu+(p-2)\alpha}|^2 \\
&+ \dots \\
&+ |N_{\alpha, \mu-(q+1)\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu-q\alpha}|^2 \\
&= \alpha \cdot (\mu + p\alpha) + \alpha \cdot (\mu + (p-1)\alpha) + \dots + \alpha \cdot (\mu - q\alpha) \\
&= \sum_{j=0}^{p+q} \alpha \cdot (\mu + (p-j)\alpha) = (p+q+1) \left[ \alpha \cdot \mu + \frac{\alpha^2}{2} (p-q) \right]
\end{aligned} \tag{D.1.16}$$

y por lo tanto

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -(p-q) \tag{D.1.17}$$

En resumen:

$$|N_{\alpha, \mu+(p-1)\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu+p\alpha}|^2 = \alpha \cdot (\mu + p\alpha) \tag{D.1.18}$$

y

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -(p-q) \tag{D.1.19}$$

donde  $p$  es tal que  $E_\alpha |\mu + p\alpha\rangle = 0$  y  $q$  tal que  $E_\alpha |\mu - q\alpha\rangle = 0$ .

Si aplicamos esto al estado con peso máximo  $\mu = \Lambda$  de la representación, luego  $p = 0$  y donde

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = q \tag{D.1.20}$$

es el número de veces que se debe aplicar  $E_\alpha$  hasta llegar a un estado nulo. Explícitamente, si en la base de los pesos fundamentales  $\Lambda = \sum_{i=1}^r n_i \omega_i$  tenemos que para  $E_{\alpha_i}$  que

$$\frac{2\alpha_i \cdot \mu}{\alpha^2} = \frac{2\alpha_i \cdot \mu}{\alpha^2} = n_i \frac{2\alpha_i \cdot \omega_i}{\alpha^2} = n_i = q_i \tag{D.1.21}$$

Aplicemos este desarrollo para construir la **6** de  $SU(3)$ . En la base de los pesos fundamentales  $\Lambda = (2, 0)$  y por lo tanto  $q_1 = 1, q_2 = 0$ . Entonces esperamos que  $\Lambda - \alpha_1$ ,  $\Lambda - 2\alpha_1$  pero no  $\Lambda - \alpha_2$  etc.

Llamemos  $1 \equiv (2, 0) = \Lambda$ ,  $2 \equiv (0, 1) = \Lambda - \alpha_1$ ,  $3 \equiv (-2, 2) = \Lambda - 2\alpha_1$ ,  $4 \equiv (1, -1) = \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2$ ,  $5 \equiv (-1, 0) = \Lambda - 2\alpha_1 - \alpha_2$ ,  $6 \equiv (0, -2) = \Lambda - 2\alpha_1 - 2\alpha_2$ , a los estados de la **6**

Encontramos que para  $\alpha = \alpha_1$

$$\begin{aligned} E_{\alpha_1}|1\rangle &= 0, E_{\alpha_1}|2\rangle = N_{\alpha_1,2}|1\rangle, E_{\alpha_1}|3\rangle = N_{\alpha_1,3}|2\rangle \\ E_{\alpha_1}|4\rangle &= 0, E_{\alpha_1}|5\rangle = N_{\alpha_1,5}|4\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.1.22})$$

y usando (D.1.18) llegamos a

$$|N_{\alpha_1,2}|^2 - 0 = \alpha_1 \cdot (2\omega_1) = 2 \quad (\text{D.1.23})$$

y por lo tanto  $N_{\alpha_1,2} = \sqrt{2}$ . De la misma manera

$$|N_{\alpha_1,3}|^2 - |N_{\alpha_1,2}|^2 = \alpha_1 \cdot (\Lambda - \alpha_1) = 0 \quad (\text{D.1.24})$$

entonces  $N_{\alpha_1,3} = N_{\alpha_1,2} = \sqrt{2}$

Finalmente

$$|N_{\alpha_1,5}|^2 - |N_{\alpha_1,4}|^2 = |N_{\alpha_1,5}|^2 = \alpha_1 \cdot (\Lambda - \alpha_1 - \alpha_2) = 2 - 2 + 1 = 1 \quad (\text{D.1.25})$$

con todos los otros coeficientes nulos. Por lo tanto hemos encontrado la matriz  $e_{\alpha_1}$

$$e_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$h_1, h_2$  se encuentran usando (D.1.7).

Siguiendo los razonamientos expuesto arriba, podemos seguir encontrando el resto de los generadores en la **6**. A continuación presentamos un resumen de todos los datos útiles usados en la Tesis para  $SU(3)$

## D.2. Resumen de datos sobre $SU(3)$

Los ocho generadores de  $SU(3)$  son denotados por los generadores Cartan  $T_1, T_2$  y por los generadores de subida (bajada)  $T_\alpha$  ( $T_{-\alpha}$ ) con  $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ , ( $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ ). Ellos satisfacen

$$[T_i, T_\alpha] = \alpha^m T_\alpha \quad (\text{D.2.1})$$

$$[T_\alpha, T_{-\alpha}] = \alpha^m T_m. \quad (\text{D.2.2})$$

Aquí la base de raíces simples es  $\alpha_1, \alpha_2$  con coordenadas  $R^2$

$$\alpha_1 = (\sqrt{2}; 0), \quad \alpha_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}) \quad (D.2.3)$$

$$\omega_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}), \quad \omega_2 = (0; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}) \quad (D.2.4)$$

Un vector peso puede ser expresado en la base de las raíces o de los pesos como  $\Lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$  donde  $a_i$  son los índices de Dynkin. La representación fundamental **3** corresponde a

Dynkin		$\lambda_1$	$\lambda_2$	original basis
0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0 $\sqrt{\frac{2}{3}}$
1	-1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $-\frac{1}{\sqrt{6}}$
-1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $-\frac{1}{\sqrt{6}}$

Los pesos para la representación adjunta **8** y la simétrica **6** están dados en las Tablas 6.1 y 6.2 respectivamente. En la base de la Tabla 6.2, la representación **6** de generadores de  $SU(3)$  se lee como

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T_2 &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \\
 T_{\alpha_1} &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T_{\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T_{\alpha_3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (D.2.5)$$

y  $T_{-\alpha} = (T_{\alpha})^t$

### D.3. Representaciones Masivas $\Lambda = \omega_j$

Mostremos que las irreps unitarias tienen estados con el mismo número de osciladores. Mostrar esto es como ver que los pesos de los estados de la irrep tienen la misma longitud. Para lograr este objetivo será necesario armar toda la representación, por lo que habrá que utilizar notación apropiada que definiremos más adelante. Utilizaremos el OPE (6.1.5), y veremos que siempre que no sea nulo, da como resultado un estado sin osciladores, es decir, siempre el producto  $\alpha \cdot \Lambda = 1$  para los OPEs no triviales.

Sea  $\Lambda = \omega_j$  el peso del estado de peso máximo. Le asociaremos el vector  $(0, 0, \dots; \mathbf{0}; 0, 0, \dots, 0)$  donde el  $\mathbf{0}$  se encuentra en la posición  $j$ -ésima. La posición  $k$ -ésima de este vector indica la cantidad de veces que se ha aplicado un operador de bajada con la raíz  $\alpha_k$ . Al ser el estado de peso máximo, naturalmente no se le ha aplicado ninguna raíz.

El único OPE no trivial que puede hacerse a este estado es con la raíz  $\alpha_j$ , y en el OPE (6.1.5) resulta  $\alpha \cdot \Lambda = 1$ , por lo que el estado descendiente  $(0, 0, \dots; \mathbf{1}; 0, 0, \dots, 0)$  no tiene osciladores. A partir de ahora, se habren dos posibilidades: Aplicar  $\alpha_{j+1}$  o  $\alpha_{j-1}$  siempre que sea posible por los índices. Por simetría analicemos uno de los casos para fijar notación. Supongamos que aplicamos  $\alpha_{j+1}$ . El OPE (6.1.5) arroja nuevamente un estado sin osciladores dado por  $(0, 0, \dots; \mathbf{1}; 1, 0, \dots, 0)$ . Si el proceso continua aplicando raíces a la derecha de  $\alpha_j$  entonces solo pueden agregarse aquellas que agreguen un 1 inmediatamente a continuación del último agregado, obtenien así todos los estados de la forma

$$\begin{aligned} &(0, 0, \dots; \mathbf{1}; 1, 0, 0, \dots, 0) \\ &(0, 0, \dots; \mathbf{1}; 1, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ &(0, 0, \dots; \mathbf{1}; 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ &(0, 0, \dots; \mathbf{1}; 1, 1, \dots, 1, 0) \\ &(0, 0, \dots; \mathbf{1}; 1, 1, \dots, 1, 1) \end{aligned}$$

donde en cada OPE el estado obtenido no tiene osciladores como se puede ver trivialmente (solo importa la última raíz aplicada). De manera análoga pueden obtenerse los estados habiendo aplicado  $\alpha_{j-1}$  con “unos” a la izquierda. Más aún, pueden mezclarse las aplicaciones de raíces a la izquierda y derecha para obtener el estado genérico

$$(\dots; \mathbf{1}; \dots)$$

donde los puntos suspensivos indican que pueden continuar un 1 o un 0 siempre “ordenados”, es decir, a la derecha de  $j$  si hay un 0 entonces a su derecha no puede haber un 1, mientras que si hay un 1 entonces a su derecha puede seguir un 1 o un 0. Análogamente, a la izquierda de  $j$ , puede haber 0 o 1, pero siempre a la izquierda de un 0 habrá 0.

A partir de los estados  $(\dots; \mathbf{1}; \dots)$  podemos contruir nuevos descendientes aplicando únicamente  $\alpha_j$  solo al subconjunto de estados de la forma  $(\dots, 1; \mathbf{1}; 1, \dots)$ , generando los siguientes estados

$$(\dots, 1; \mathbf{2}; 1, \dots)$$

los cuales son trivialmente del OPE (6.1.5) estados sin osciladores. A partir de aquí se avanza exactamente igual que con el estado  $(0, 0, \dots; \mathbf{1}; 0, 0, \dots, 0)$ , es decir se pueden aplicar raíces a la izquierda o la derecha de  $\mathbf{2}$  para aumentar de 1 a 2 el valor en el lugar aplicado. Esto puede hacerse *siempre y cuando* la diferencia entre la posición  $(k+1)$ -ésima y la  $(k-1)$ -ésima, respecto de la posición  $k$  donde se aplica la raíz, sea 1. Por ejemplo, al estado  $(\dots, 1; \mathbf{2}; 1, 0, \dots, 0)$  no puede aplicarse para obtener un nuevo estado la raíz  $\alpha_{j+1}$  pues ésta da en el OPE  $\alpha \cdot \Lambda = 2 - 2 = 0$ . Si en cambio fuese el estado  $(\dots, 1; \mathbf{2}; 1, 1, \dots)$  entonces puede aplicarse  $\alpha_{j+1}$  y obtener  $(\dots, 1; \mathbf{2}; 2, 1, \dots)$  pues en el OPE  $\alpha \cdot \Lambda = 2 - 2 + 1 = 1$  (y nuevamente con un solo oscilador).



Este proceso permite aumentar los 1 a 2 salvo cuando a continuación del 1 haya un 0 o sea el fin del vector. Por ejemplo, en los estados  $(\dots, 1; \mathbf{2}; 2, 1, 0, \dots, 0)$  y  $(\dots, 1; \mathbf{2}; 2, 2, \dots, 2, 1)$  los 1 a la derecha de la posición  $j$  no pueden ser aumentados a 2 ya que el OPE da contribución nula.

Por lo tanto hemos construido los estados de la forma

$$(\dots; \mathbf{2}; \dots)$$

donde los puntos suspensivos indican que pueden continuar, tanto a la izquierda como a la derecha, un 2, un 1 o un 0 pero siempre “en escalera”, y por construcción nunca puede seguirle a un 2 un cero, siempre debe haber un 1 en el medio. Por lo que el patrón de la construcción es el siguiente: Si  $(; \mathbf{n_j}; \dots, n_{k-1}, n_k, n_{k+1}, \dots)$  es un estado en la construcción de la irrep entonces  $n_{k-1} - n_k = n_k - n_{k+1} = 1$ .

El proceso de construcción continua de forma recursiva. Notar que por ejemplo, para aumentar el **2** a **3** es necesario que sea a partir de estado  $(\dots, 2; \mathbf{2}; 2, \dots)$ , análogo a lo ocurrido con  $(\dots, 1; \mathbf{1}; 1, \dots)$ .

Por como se viene argumentando uno podría pensar que este algoritmo de construcción nunca termina. El detalle que lo hace terminar es que la posición  $k = 1$  y la posición  $k = \text{rang}(G)$  nunca habrá un número mayor a 1; en las posiciones  $k = 2$  y  $k = \text{rang}(G) - 1$  nunca habrá un número mayor a 2; etc. Por lo tanto una vez que consigamos poner un **j** en la posición  $j$ -ésima el proceso termina.

Habiendo construido así toda la irrep y viendo que en cada paso no se generaron osciladores, puede concluirse que las irrep unitarias tienen todos los estados con el mismo número de osciladores<sup>1</sup>.

## D.4. Simetrías Gauge en Compactificaciones

Supongamos que tomamos una teoría de gauge no-Abeliana en 5 dimensiones. El Lagrangiano correspondiente sería

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g} \text{tr}(F^{MN} F_{MN}) \quad (\text{D.4.1})$$

$$F_{MN}^a = \partial_{[M} A_{N]}^a + f_{bc}^a A_M^b A_N^c$$

Este tiene simetría de gauge usual, dada por

$$A_N \rightarrow A_N + \partial_N \alpha + [A_N, \alpha] \quad (\text{D.4.2})$$

---

<sup>1</sup>En teoría de grupos este resultado es análogo a decir que para toda irrep de la forma  $\Lambda = \omega_j$ , los estados en la misma tienen pesos de la misma longitud.

Al compactificar, definimos los grados de libertad en bajas dimensiones  $A_N = (A_\mu, \phi)$ . Si la compactificación la dimensión extra a un Toro, la transformación anterior se reduce ahora a

$$\begin{aligned} A_\mu^{a(n)} &\rightarrow A_\mu^{a(n)} + \partial_\mu \alpha^{a(n)} + f_{bc}^a \sum_{l+m=n} A_\mu^{b(m)} \alpha^{c(l)} \\ \phi^{a(n)} &\rightarrow \phi^{a(n)} + iq_n \alpha^{a(n)} + f_{bc}^a \sum_{l+m=n} \phi^{b(m)} \alpha^{c(l)} \end{aligned} \quad (D.4.3)$$

donde el índice entero  $n$  indica el modo en el desarrollo de Fourier de la dirección interna extra. La transformación de gauge ahora mezcla a los infinitos grados de libertad.

Analicemos ahora lo que sucede en el Lagrangiano. Luego de integrar en la dimensión compacta queda

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g} \delta_{ab} F_{\mu\nu}^{a(n)} F^{b,\mu\nu(-n)} + \frac{1}{2g} \delta_{ab} F_{\mu 5}^{a(n)} F^{b,\mu 5(-n)} \quad (D.4.4)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{(n)} &= \partial_{[\mu} A_{\nu]}^{(n)} + \sum_{k+m=n} [A_\mu^{(k)}, A_\nu^{(m)}] \\ F_{\mu 5}^{(n)} &= \partial_\mu \phi^{(n)} - iq_n A_\mu^{(n)} + \sum_{k+m=n} [A_\mu^{(k)}, \phi^{(m)}] \end{aligned} \quad (D.4.5)$$

como puede verse, del término con  $F_{\mu 5}^{(n)}$  aparece una masa para el modo  $(n)$  de los vectores proporcional a la carga del mismo.

La simetría usual de gauge sigue estando presente en  $4D$ , y proviene de elegir el parámetro de la transformación tal que solo tengo modo cero, i.e.  $\alpha^k = 0 \iff k \neq 0$ . Las derivadas covariantes se arman a partir de elegir el modo cero en la sumatoria en modos, por ejemplo para los escalares queda

$$F_{\mu 5}^{a(n)} = \left( \partial_\mu \phi^{a(n)} + f_{bc}^a A_\mu^{b(0)} \phi^{c(n)} \right) - iq_n A_\mu^{a(n)} + \sum_{k+m=n, k \neq 0} f_{bc}^a A_\mu^{b(k)} \phi^{c(m)} \quad (D.4.6)$$

siendo el término entre paréntesis la derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu \phi^{(n)}$  del modo  $n$ .

Curiosamente no aparece término de masa para los modos de los escalares, y esto se debe a que pueden ser absorbidos por los vectores del mismo modo para que estos adquieran la cantidad de grados de libertad adecuados. Esto se ve fácilmente de la transformación de gauge completa para los modos, donde se puede fijar al campo transformado a cero, quedando

$$\phi^{a(n)} \rightarrow \phi^{a(n)} + iq_n \alpha^{a(n)} + f_{bc}^a \sum_{l+m=n} \phi^{b(m)} \alpha^{c(l)} = 0 \quad (D.4.7)$$

la cual se satisface autoconsistentemente a primer orden en  $\alpha$  al elegir

$$\phi^{a(n)} = -iq_n \alpha^{a(n)} \quad (D.4.8)$$

y por lo tanto los vectores quedan (a primer orden en los campos)

$$A_\mu^{a(n)} \rightarrow A_\mu^{a(n)} + i \frac{\mathcal{D}_\mu \phi^{a(n)}}{q_n} \quad (D.4.9)$$

que ocurre para todo modo  $n \neq 0$ , ya que para los modos cero  $q_0 = 0$ .



# Bibliografía

- [1] Hull, C., Zwiebach, B. Double field theory. *Journal of High Energy Physics*, **2009** (09), 099, 2009. [4](#), [105](#)
- [2] Freidel, L., Leigh, R. G., Minic, D. Intrinsic non-commutativity of closed string theory. *Journal of High Energy Physics*, **2017** (9), 60, 2017. [4](#), [93](#), [94](#), [95](#), [104](#), [119](#)
- [3] Freidel, L., Leigh, R. G., Minic, D. Noncommutativity of closed string zero modes. *Physical Review D*, **96** (6), 066003, 2017. [104](#)
- [4] Sakamoto, M. A physical interpretation of cocycle factors in vertex operator representations. *Physics Letters B*, **231** (3), 258–262, 1989. [4](#), [93](#), [94](#), [119](#)
- [5] Bailin, D., Love, A. Kaluza-klein theories. *Reports on Progress in Physics*, **50** (9), 1087, 1987. [9](#), [10](#), [43](#), [147](#)
- [6] Scherk, J., Schwarz, J. H. How to get masses from extra dimensions. *Nuclear Physics B*, **153**, 61–88, ene. 1979. URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90592-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90592-3). [10](#)
- [7] Green, M. B., Schwarz, J. H., Witten, E. Superstring theory: volume 2, loop amplitudes, anomalies and phenomenology. Cambridge university press, 2012. [13](#), [19](#), [127](#)
- [8] Blumenhagen, R., Lüst, D., Theisen, S. Basic concepts of string theory. Springer Science & Business Media, 2012. [21](#)
- [9] Ibáñez, L. E., Uranga, A. M. String theory and particle physics: An introduction to string phenomenology. Cambridge University Press, 2012. [13](#), [21](#)
- [10] Siegel, W. Two-vierbein formalism for string-inspired axionic gravity. *Physical Review D*, **47** (12), 5453, 1993. [22](#), [24](#), [145](#)
- [11] Aldazabal, G., Marques, D., Nunez, C. Double field theory: a pedagogical review. *Classical and Quantum Gravity*, **30** (16), 163001, 2013. [22](#), [81](#), [105](#)
- [12] Aldazabal, G., Baron, W., Marqués, D., Núñez, C. Erratum: the effective action of double field theory. *Journal of High Energy Physics*, **2011** (11), nov. 2011. URL [https://doi.org/10.1007/jhep11\(2011\)109](https://doi.org/10.1007/jhep11(2011)109). [22](#)

- [13] Geissbühler, D. Double field theory and  $\mathcal{N} = 4$  gauged supergravity. *Journal of High Energy Physics*, **2011** (11), nov. 2011. URL [https://doi.org/10.1007/jhep11\(2011\)116](https://doi.org/10.1007/jhep11(2011)116).
- [14] Geissbühler, D., Marqués, D., Nunez, C., Penas, V. Exploring double field theory. *Journal of High Energy Physics*, **2013** (6), 101, 2013. [22](#), [24](#), [145](#)
- [15] Dibitetto, G., Fernández-Melgarejo, J., Marques, D., Roest, D. Duality orbits of non-geometric fluxes. *Fortschritte der Physik*, **60** (11-12), 1123–1149, 2012. [22](#)
- [16] Siegel, W. Superspace duality in low-energy superstrings. *Physical Review D*, **48** (6), 2826, 1993. [24](#), [145](#)
- [17] Hohm, O., Hull, C., Zwiebach, B. Generalized metric formulation of double field theory. *Journal of High Energy Physics*, **2010** (8), 8, 2010. [24](#)
- [18] Ortín, T. Gravity and strings. Cambridge University Press, 2004. [31](#), [53](#)
- [19] Dolan, L. Massive kaluza-klein theories and bound states in yang-mills. En: Vertex Operators in Mathematics and Physics, págs. 353–372. Springer, 1985. [43](#), [147](#), [148](#)
- [20] Salam, A., Strathdee, J. On kaluza klein theory. En: Selected Papers Of Abdus Salam: (With Commentary), págs. 451–487. World Scientific, 1994. [43](#), [148](#)
- [21] Hohm, O., Samtleben, H. Gauge theory of kaluza-klein and winding modes. *Physical Review D*, **88** (8), 085005, 2013. [44](#)
- [22] Han, T., Lykken, J. D., Zhang, R.-J. Kaluza-klein states from large extra dimensions. *Physical Review D*, **59** (10), 105006, 1999. [46](#)
- [23] Giudice, G. F., Rattazzi, R., Wells, J. D. Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders. *Nuclear Physics B*, **544** (1-2), 3–38, 1999. [46](#)
- [24] Fierz, M., Pauli, W. E. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **173** (953), 211–232, 1939. [53](#)
- [25] Peeters, K. A field-theory motivated approach to symbolic computer algebra. *arXiv preprint cs/0608005*, 2006. [53](#)
- [26] Aldazabal, G., Graña, M., Iguri, S., Mayo, M., Nuñez, C., Rosabal, J. A. Enhanced gauge symmetry and winding modes in double field theory. *Journal of High Energy Physics*, **2016** (3), mar. 2016. URL [https://doi.org/10.1007/jhep03\(2016\)093](https://doi.org/10.1007/jhep03(2016)093). [60](#), [64](#), [66](#)
- [27] Aldazabal, G., Grana, M., Iguri, S., Mayo, M., Nunez, C., Rosabal, J. Enhanced gauge symmetry and winding modes in double field theory. *Journal of High Energy Physics*, **2016** (3), 93, 2016. [63](#), [93](#), [115](#)

- [28] Cagnacci, Y., Graña, M., Iguri, S., Nuñez, C. The bosonic string on string-size tori from double field theory. *Journal of High Energy Physics*, **2017** (6), 5, 2017. [63](#), [93](#)
- [29] Dixon, L. J., Kaplunovsky, V. S., Vafa, C. On four-dimensional gauge theories from type II superstrings. *Nuclear Physics B*, **294**, 43–82, 1987. URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(87\)90572-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90572-4). [77](#)
- [30] Schön, J., Weidner, M. Gauged n=4 supergravities. *Journal of High Energy Physics*, **2006** (05), 034–034, mayo 2006. URL <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2006/05/034>. [81](#), [86](#), [87](#)
- [31] Samtleben, H. Lectures on gauged supergravity and flux compactifications. *Classical and Quantum Gravity*, **25** (21), 214002, oct. 2008. URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/21/214002>. [81](#)
- [32] Trigiante, M. Gauged supergravities. *Physics Reports*, **680**, 1–175, mar. 2017. URL <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.03.001>.
- [33] Bergshoeff, E., Koh, I., Sezgin, E. Coupling of yang-mills to n = 4, d = 4 supergravity. *Physics Letters B*, **155** (1-2), 71–75, mayo 1985. URL [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(85\)91034-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)91034-2). [81](#), [86](#), [87](#)
- [34] Shelton, J., Taylor, W., Wecht, B. Nongeometric flux compactifications. *Journal of High Energy Physics*, **2005** (10), 085–085, oct. 2005. URL <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2005/10/085>. [81](#)
- [35] Narain, K., Sarmadi, M., Witten, E. A note on toroidal compactification of heterotic string theory. *Nuclear Physics B*, **279** (3-4), 369–379, ene. 1987. URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(87\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90001-0). [85](#), [86](#)
- [36] Narain, K. New heterotic string theories in uncompactified dimensions <10. *Physics Letters B*, **169** (1), 41–46, 1986. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269386906829>. [85](#), [86](#)
- [37] Jeon, I., Lee, K., Park, J.-H. Incorporation of fermions into double field theory. *Journal of High Energy Physics*, **2011** (11), nov. 2011. URL [https://doi.org/10.1007/jhep11\(2011\)025](https://doi.org/10.1007/jhep11(2011)025). [86](#)
- [38] Jeon, I., Lee, K., Park, J.-H. Supersymmetric double field theory: A stringy reformulation of supergravity. *Physical Review D*, **85** (8), abr. 2012. URL <https://doi.org/10.1103/physrevd.85.081501>. [86](#)
- [39] Berman, D. S., Lee, K. Supersymmetry for gauged double field theory and generalised scherk–schwarz reductions. *Nuclear Physics B*, **881**, 369–390, abr. 2014. URL <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2014.02.015>. [86](#)

- [40] Bergshoeff, E., de Wit, T., Gran, U., Linares, R., Roest, D. (non-)abelian gauged supergravities in nine dimensions. *Journal of High Energy Physics*, **2002** (10), 061–061, oct. 2002. URL <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2002/10/061>. 88
- [41] Fernández-Melgarejo, J. J., Ortín, T., Torrente-Luján, E. The general gaugings of maximal  $d = 9$  supergravity. *Journal of High Energy Physics*, **2011** (10), oct. 2011. URL [https://doi.org/10.1007/jhep10\(2011\)068](https://doi.org/10.1007/jhep10(2011)068).
- [42] Dibitetto, G., Fernández-Melgarejo, J., Marqués, D., Roest, D. Duality orbits of non-geometric fluxes. *Fortschritte der Physik*, **60** (11-12), 1123–1149, mayo 2012. URL <https://doi.org/10.1002/prop.201200078>. 88
- [43] Giveon, A., Porrati, M., Rabinovici, E. Target space duality in string theory. *Physics Reports*, **244** (2-3), 77–202, ago. 1994. URL [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(94\)90070-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(94)90070-1). 92
- [44] Aldazabal, G., Andrés, E., Mayo, M., Rosabal, J. A. Gauge symmetry enhancing-breaking from a double field theory perspective. *Journal of High Energy Physics*, **2017** (7), jul. 2017. URL [https://doi.org/10.1007/jhep07\(2017\)045](https://doi.org/10.1007/jhep07(2017)045). 92, 93, 99
- [45] Aldazabal, G., Andrés, E., Mayo, M., Penas, V. Double field theory description of heterotic gauge symmetry enhancing-breaking. *Journal of High Energy Physics*, **2017** (10), oct. 2017. URL [https://doi.org/10.1007/jhep10\(2017\)046](https://doi.org/10.1007/jhep10(2017)046). 92, 113, 115
- [46] Fraiman, B., Graña, M., Nuñez, C. A. A new twist on heterotic string compactifications. *Journal of High Energy Physics*, **2018** (9), sep. 2018. URL [https://doi.org/10.1007/jhep09\(2018\)078](https://doi.org/10.1007/jhep09(2018)078). 93, 113
- [47] Douglas, M., Nekrasov, N. Noncommutative field theory. *Reviews of Modern Physics*, **73** (4), 977–1029, nov. 2001. URL <https://doi.org/10.1103/revmodphys.73.977>. 96
- [48] Hohm, O., Kwak, S. K. Double field theory formulation of heterotic strings. *Journal of High Energy Physics*, **2011** (6), 96, 2011. 103
- [49] Aldazabal, G., Mayo, M., Nuñez, C. Probing the string winding sector. *Journal of High Energy Physics*, **2017** (3), mar. 2017. URL [https://doi.org/10.1007/jhep03\(2017\)096](https://doi.org/10.1007/jhep03(2017)096). 132
- [50] Cagnacci, Y., Graña, M., Iguri, S., Nuñez, C. The bosonic string on string-size tori from double field theory. *Journal of High Energy Physics*, **2017** (6), jun. 2017. URL [https://doi.org/10.1007/jhep06\(2017\)005](https://doi.org/10.1007/jhep06(2017)005). 144



## Publicaciones asociadas

1. *Probing the String Winding Sector*, **JHEP** 10.1007/JHEP03(2017)096
2. *Gauge symmetry enhancing-breaking from a Double Field Theory perspective*, **JHEP** 10.1007/JHEP07(2017)045
3. *Double Field Theory description of Heterotic gauge symmetry enhancing-breaking*, **JHEP** 10.1007/JHEP10(2017)046
4. *Symmetry enhancement interpolation, non-commutativity and Double Field Theory*, **JHEP** 10.1007/JHEP03(2019)012



# Agradecimientos

A mi director, mis amigos y mis abuelos.

